Квант

1976
12

Научно-популярный физико-математический журнал





Периодические функции играют важную роль в анализе. Характерным примером периодических функций является знакомая вам синусоида. На этом рисунке изображен орнамент, сконструированный из синусоид, выполненный ЭВМ.

Постарайтесь разобраться в этом орнаменте. О периодических функциях и их основных свойствах вы можете прочитать в статье на с. 34

На рисунке, приведенном на обложке, изображена скатерть, сшитая из шелковых лоскутков. Несколько этих лоскутков образуют правильную пятиконечную звезду. Обнаружить эту спрятанную звезду не так-то просто.

Не могли бы вы найти звезду и отделить ее от остальной части скатерти?

Основан в 1970 году

Квант 1976 12

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

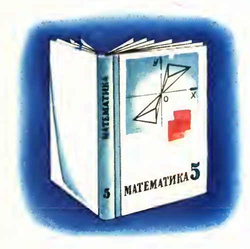


Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

А. Савин

ОТ ШКОЛЬНОЙ ЗАДАЧИ – К ПРОБЛЕМЕ



Расстановки и транспозиции

Как-то раз, перелистывая учебник своего сына «Математика-5», я наткнулся на следующую задачу *).

Тома «Детской энциклопедии» стояли в таком порядке: 1, 2, 6, 10, 3, 8, 4, 7, 9, 5. *Как поставить их по порядку, если можно брать два соседних тома и ставить их, не меняя порядка, рядом на новое место* (*в начало, конец или между двумя томами*)?

Довольно быстро мне удалось найти решение. Оно изображено на рисунке 1. Но у меня давно выработалась привычка анализировать решенную задачу, и сразу же возник вопрос: «А если бы тома стояли иначе?». Тут же в голову пришел способ перестановки, не зависящий от первоначальной расстановки томов. Сначала взять 1-й том и том, стоящий справа от него, и поставить их в начало, затем 2-й том и том, стоящий справа от него, и поставить их за 1-м томом и т. д. Если нужный том стоит в конце ряда, то сначала следует взять любую пару из еще не установленных томов и переставить их в конец ряда, после чего перестановка нужного тома окажется возможной.

Я испробовал этот способ на расстановке, предложенной в задаче, и четырьмя перестановками поставил тома в нужном порядке. Затем взял расстановку: 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. После шести перестановок (см. рис. 2) пришел к следующей расстановке: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 9. Тут я обнаружил, что дальше метод не действует. Кроме 9-го, остался лишь один 10-й том, и переставлять в конец ряда нечего.

Я проделал перестановку томов еще раз и тем же способом, но ставя в конец ряда уже другие пары. Переставлять пришлось дольше, но результат остался прежним — снова на конце ряда сочетание 10, 9, с которым мой способ не может справиться. И тут я вспомнил, что аналогичная ситуация возникает в знаменитой игре «15» *). Там передвижениями фишек невозможно из положения на рисунке 3 перейти в положение на рисунке 4.

Идея доказательства этого факта основана на операции «транспозиция». *Транспозицией* некоторой последовательности чисел называется перемена местами каких-либо двух из этих чисел. При этом доказывается, что если одна последовательность чисел получается из другой при помощи четного числа транспозиций, то невозможно добиться того же результата с помощью нечетного числа транспозиций, и, наоборот, если последо-

*) В последнем издании учебника «Математика-5» (М., «Просвещение», 1976) эта задача фигурирует под номером 1249.

*) См. «Квант», 1974, № 2, с. 26.

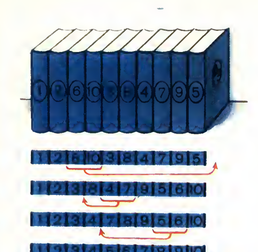


Рис. 1.

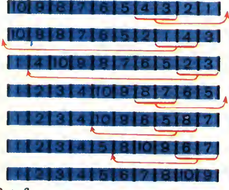


Рис. 2.



Рис. 3.



Рис. 4.

вательность чисел получается из другой нечетным числом транспозиций, то невозможно получить ее четным числом транспозиций.

Осталось выяснить, четному или нечетному числу транспозиций соответствует операция, описанная в задаче. Перенос одного тома на новое место эквивалентен серии транспозиций: сначала с ближайшим томом, потом со следующим и т. д., пока он не встанет на свое новое место. Точно так же перенос следующего тома эквивалентен серии транспозиций с теми же томами, что и в первом случае. Общее число транспозиций будет равно удвоенному числу транспозиций при переносе одного тома, поэтому наша операция эквивалентна *четному* числу транспозиций.

Следовательно, некоторые расстановки томов операцией, указанной в задаче, можно упорядочить, а другие — нельзя. В частности, расстановка 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 9 получается из расстановки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 нечетным числом транспозиций, и, следовательно, не может быть в нее переведена рассматриваемой операцией.

Обратите внимание, что в наших рассуждениях мы нигде не пользовались тем, что томов 10. С тем же успехом эти рассуждения можно провести для любого другого количества томов.

А вот то, что мы переставляли по два тома сразу, было очень существенно. Действительно, если бы мы переставляли по одному тому, то при любой начальной расстановке такой операцией мы смогли бы расставить тома по порядку. А если переставлять по три тома? А по четыре?...

На половину из этих вопросов можно ответить сразу. Перестановка четного числа томов соответствует четному числу транспозиций, следовательно, такой операцией невозможно перевести одну расстановку в другую, получающуюся из нее нечетным числом транспозиций.

Ну, а если переставлять по три тома? Давайте попробуем! Сколько же для начала взять томов? Три — мало, возьмем четыре. Посмотрим, какие расстановки можно получить из расстановки по порядку: 1, 2, 3, 4 — из нее 2, 3, 4, 1 и 4, 1, 2, 3, из них 3, 4, 1, 2... и все! Такие перестановки называют *циклическими*, потому что они переставляют числа по кругу — если одну расстановку выписать по окружности, то любую другую можно прочитать, начав с некоторого места (рис. 5). Но никакие две из расстановок

1, 2, 3, 4
1, 2, 4, 3
1, 3, 2, 4
1, 3, 4, 2
1, 4, 2, 3
1, 4, 3, 2

нельзя перевести друг в друга циклическими перестановками, а ведь каждой из них соответствуют еще по три расстановки, получающиеся циклическими перестановками. Таким образом, все 24 различные расстановки чисел 1, 2, 3 и 4 (проверьте, что их 24) разбиваются на 6 групп по 4 расстановки в группе, причем нашей операцией мы не можем получить из расстановки одной группы расстановку другой группы.

Сохранится ли такое положение, если мы возьмем не четыре, а пять или больше томов? Оказывается, нет! Решающую роль здесь сыграет следующая последовательность расстановок:

1, 2, 3, 4, 5 → 1, 3, 4, 5, 2 →
→ 4, 5, 2, 1, 3 → 2, 1, 3, 4, 5.

Переставляя по три тома, мы поменяли местами первый и второй тома, вернув на место остальные. Таким же образом мы можем переставить любые два соседних тома, причем не только, когда у нас пять томов, но и для любого бо́льшего числа томов. Действительно, если эти два тома — не последние, то взяв еще и следующий за ними том, переставим эту тройку томов вперед, затем поменяем местами первые два тома (как было показано) и снова

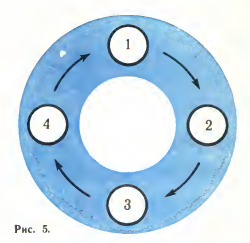


Рис. 5.

вернем тройку томов на их старое место. В результате все тома встанут на прежние места, кроме выбранных нами двух томов, которые поменяются местами. Если же мы захотим поменять местами последние два тома, то сначала возьмем три первых тома, поставим их в конец, затем совершим описанную процедуру, и, наконец, поставим на старое место стоявшие в начале тома.

Теперь для вас, видимо, не будет неожиданным утверждение: *если число томов не меньше пяти, то любую расстановку этих томов можно перевести в расстановку по порядку, переставляя тома тройками* *). Ведь, последовательно меняя местами соседние тома, можно сначала перевести первый том на первое место, затем второй том — на второе и т. д.

А что будет в случае перестановки по пять томов? По семь томов? Вообще по $2n+1$ тому? Решения этой проблемы я нигде не встречал.

Можно спросить: «А кому нужны эти перестановки?» Оказывается, нужны, и очень часто, например, теория перестановок играет важнейшую роль при решении вопроса — можно ли корни данного алгебраического урав-

*) Тем самым мы решили задачу М404 («Квант», 1976, № 9).

нения n-й степени выразить с помощью радикалов (как это делается для квадратного уравнения). Было выяснено, что уравнения третьей и четвертой степени обладают этим свойством, а для уравнений пятой степени и выше корни, как правило, уже невозможно выразить через коэффициенты с помощью радикалов.

В «Кванте» про это уже рассказывалось, последний раз — в статьях «Группы» и «Алгебра — древняя и современная» («Квант», 1976, № 10). Если вы их читали, то сразу заметите, что рассматриваемые нами перемещения томов — это *подстановки*, порождающие *группу* (правда, не всю группу подстановок S_n — в этом и состоит проблема), а перестановки по кругу четырех элементов образуют *циклическую группу*. Может быть, теория групп вам и поможет (хотя, скорее всего, эта задача решается «комбинаторными» соображениями).

Теперь, пожелав успеха тем, кто решил взяться за окончательное решение поставленной проблемы, поищем в учебнике еще интересные задачи.

Одно или больше?

Найдите четыре натуральных числа, таких, что сумма произведения любых трех из них и 1 делится на четвертое число.

Первое, что приходит в голову,— взять все числа равными 1. Такая четверка чисел действительно удовлетворяет условиям задачи. А нет ли еще решений? Где-то я видел эту задачу. Открываю книжку И. Л. Бабинской «Задачи математических олимпиад» (М., «Наука», 1975) и нахожу ее под номером 142. Ищу ответ. Читаю — «Например, 1, 2, 3, 7». Меня этот ответ не устраивает. Для меня это то же самое, что ответ: «Например, 2» на вопрос: «Какие корни у уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$?».

Нет... где-то еще я видел подобную задачу. Ну конечно, «Сборник задач московских математических олимпиад» (М., «Просвещение», 1965), с. 70, задача 215. Вот она.

215. *Найти все такие тройки чисел a, b, c, отличных от 1, что произведение любых двух чисел тройки, сложенное с единицей, делится на третье число.*

В ответе — единственный набор: 2, 3, 7.

Не правда ли, ответ очень похож на ответ интересующей нас задачи, хотя здесь речь идет не о четырех, а о трех числах. А что будет для двух чисел? Для каких пар чисел сумма каждого из них с единицей делится на другое? Задача с четырьмя числами для пятиклассников, с тремя — для учеников 7—10 классов... Однако наберемся смелости и приступим к решению.

Если одно из этих двух чисел 1, то второе число должно быть делителем числа 2: либо 1, либо 2. Нетрудно проверить, что обе пары (1, 1) и (1, 2) удовлетворяют условию задачи.

Пусть ни одно из чисел не равно 1. Тогда, очевидно, эти числа взаимно просты. Пусть $a<b$, тогда $a+1 \leqslant b$, но $a+1$ делится на b, следовательно, $a+1 \geqslant b$. Отсюда вытекает, что $a+1=b$. А так как $b+1$ делится на a, то $a+2$ делится на a, следовательно, 2 делится на a, и поскольку $a \neq 1$, то $a=2$, $b=3$.

Итак, существуют всего три пары таких чисел, что сумма одного из них с единицей делится на другое: (1, 1), (2, 1), (3, 2).

Достаточно простое решение этой задачи наводит на мысль попробовать решить сразу общую задачу:

«*Найти n чисел таких, что произведение любых $n-1$ из них в сумме с единицей делится на оставшееся*».

Докажем две леммы.

Лемма 1. *Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обладают тем свойством, что произведение любых $(n-1)$ из них в сумме с 1 делится на оставшееся. Тогда, добавив к ним число $a_{n+1}=1$, получим набор чисел, произведение любых n из которых в сумме с 1 делится на оставшееся. И, наоборот, если среди $n+1$ чисел есть 1 и произведение любых n из них в сумме с 1 делится на оставшееся, то, убрав из*

этого набора единицу, получим набор из n чисел, произведение любых n — 1 из которых в сумме с единицей делится на оставшееся.

Формулировка леммы громоздка, а доказательство тривиально. Достаточно использовать тот факт, что от умножения числа на единицу это число не меняется, и то, что на единицу делится любое число.

Более содержательной является вторая лемма.

Лемма 2. *Пусть числа a_1, a_2, ..., a_n обладают тем свойством, что произведение любых $(n - 1)$ из них в сумме с 1 делится на оставшееся. Тогда, добавив к ним число $a_{n+1} = a_1 a_2 \ldots a_n + 1$, получим набор чисел, произведение любых n из которых в сумме с единицей делится на оставшееся.*

Для доказательства нужно проверить два утверждения.

Первое — то, что произведение первых n чисел в сумме с единицей делится на a_{n+1} — следует из определения числа a_{n+1}.

Второе — для случая, когда число a_{n+1} входит в произведение. Обозначим через A_i произведение первых $n - 1$ чисел без a_i: надо показать, что $A_i a_{n+1} + 1$ делится на a_i. Для этого достаточно заметить, что $a_{n+1} = a_i A_i + 1$; тогда

$$A_i a_{n+1} + 1 = A_i(A_i a_i + 1) + 1 = a_i A_i^2 + (A_i + 1),$$

и первое слагаемое делится на a_i, второе, заключенное в скобки, тоже — по предположению леммы.

Из этих лемм следует, что в задаче с тремя числами будут следующие решения: (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3), (2, 3, 7); в задаче с четырьмя числами (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 3), (1, 2, 3, 7), (2, 3, 7, 43). Осталось выяснить, нет ли других решений.

Новых решений, содержащих единицы, при $n=3$, очевидно, нет (убрав одну из единиц, мы по лемме 1 получили бы новое решение задачи с двумя числами, а в ней других решений нет). Пусть теперь (x, y, z) — некоторое решение задачи с тремя числами. Легко доказать, что любые два из этих чисел должны быть взаимно простыми. Пусть $2 \leqslant x < y < z$. Запишем соотношения задачи:

$$\begin{cases} xy + 1 = k_1 z, \\ xz + 1 = k_2 y, \\ yz + 1 = k_3 x. \end{cases}$$

Здесь k_1, k_2, k_3 — натуральные числа. Перемножив эти соотношения, получим:

$$xyz(xyz + x + y + z) + xy + yz + xz + 1 = k_1 k_2 k_3 xyz.$$

Отсюда следует, что $xy + yz + xz + 1$ делится на xyz, т. е.

$$xy + yz + xz + 1 = Axyz,$$

где A — натуральное число. Разделив обе части этого равенства на xyz, получим

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} = A.$$

Наибольшее значение A получится при наименьших значениях x, y, z, т. е. при $x=2$, $y=3$, $z=4$ (на самом деле $z \geqslant 5$). Отсюда

$$A \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{27}{24},$$

и, поскольку A — натуральное число, то оно равно 1. Итак, нужно найти все натуральные числа x, y и z такие, что $2 \leqslant x < y < z$ и

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} = 1.$$

Покажем, что $x = 2$. Действительно, если $x \geqslant 3$, то $y \geqslant 4$, $z \geqslant 5$, следовательно,

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{48}{60}.$$

Получили противоречие. Итак, $x=2$. Тогда соотношение запишется так:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2yz}.$$

Выразив отсюда y, получим

$$y = 2 + \frac{5}{z - 2}.$$

Значит, $z-2$ является делителем числа 5, т. е. $z=3$, или $z=7$. В первом случае $y=7$, во втором $y=3$.

Итак, (2, 3, 7) — единственное решение задачи с тремя числами, не содержащее единицы, следовательно, ранее нами были выписаны все решения этой задачи.

Посмотрим, существуют ли другие решения задачи с четырьмя числами.

Очевидно, и здесь достаточно рассмотреть лишь те решения, которые не содержат единиц т. е. натуральные числа x, y, z, u такие, что $2 \leqslant x < y < z < u$ и

$$xyz + 1 = k_1 u,$$
$$xyu + 1 = k_2 z,$$
$$xzu + 1 = k_3 y,$$
$$yzu + 1 = k_4 x,$$

где k_1, k_2, k_3 и k_4 — натуральные числа. Перемножив эти соотношения, получим аналогично предыдущему случаю, что

$$xyz + uxy + xzu + yzu + 1 = Axyzu,$$

где A — натуральное число, или

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} + \frac{1}{xyzu} = A.$$

Поскольку $x \geqslant 2$, $y \geqslant 3$, $z \geqslant 4$, $u \geqslant 5$, то

$$A \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{31}{24},$$

следовательно, $A = 1$. Далее аналогично показывается, что $x = 2$, $y = 3$. Теперь

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{u} + \frac{1}{6zu} = \frac{1}{6},$$

откуда

$$z = 6 + \frac{37}{u - 6}.$$

Значит, $u - 6$ является делителем числа 37, т. е. либо $u = 7$, $z = 43$, либо $u = 43$, $z = 7$. Итак, снова получили лишь имеющееся уже решение. Значит, и в этом случае были перечислены все решения.

Полученный результат наталкивает нас на гипотезу, что и дальше все решения задачи для n чисел будут получаться из решений задачи для $n - 1$ числа с помощью лемм 1 и 2. Увы! Гипотеза эта неверна, во всяком случае для $n = 5$ — кроме решения (2, 3, 7, 43, 1807), получаемого с помощью леммы 2, есть еще одно: (2, 3, 7, 47, 395).

А что будет дальше? Будут ли решения задач для большего количества чисел получаться применением лемм 1 и 2 к этим теперь уже двум решениям, не содержащим единиц, или появится еще одно или даже два? Пока это проблема.

Сколько делений?

Следующая задача «на смекалку» также фигурирует во многих книгах для школьников.

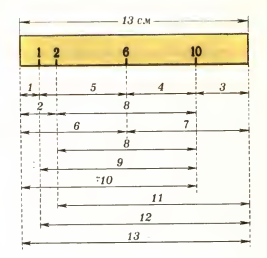


Рис. 6.

Длина линейки без делений 13 см. Как поставить 4 деления внутри линейки так, чтобы с ее помощью можно было отложить отрезки длиной в 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 см?

Условие задачи, видимо, нужно пояснить. Поставив деление, отстоящее от конца на 1 *см*, и несколько раз прикладывая линейку, можно отложить любую из заданных длин. Здесь же требуется указать соответствующую длину прямо на линейке, от деления до деления (или до конца линейки).

На рисунке 6 показано одно из решений этой задачи. Естественно попытаться выяснить, есть ли другие решения, но гораздо интереснее такие вопросы: почему именно четыре деления? А если три? Какова наибольшая длина линейки, на которую можно нанести 4 деления с выполнением указанных свойств? И вообще, *какое наименьшее количество делений нужно нанести на линейку длины n (см), чтобы с ее помощью можно было отложить все целочисленные отрезки от 1 см до n (см)?*

Как всегда, начнем с проб. Для линейки длины 1 *см* никаких делений не нужно. При длине в 2 *см* и

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

Рис. 7.

3 *см* достаточно одного деления. При длине в 4, 5, 6 *см* двух делений достаточно, а одного мало, при длине в 7, 8, 9 *см* надо три деления (двух не хватит), при длине в 10, 11, 12, 13 *см* — четыре деления (трех не хватит). Эти результаты получены перебором вариантов, соответствующие им расстановки изображены на рисунке 7, но с увеличением длины линейки становится все труднее и труднее проводить полный перебор. Нужны какие-то общие методы. Попробуем сперва оценить число делений (сверху и снизу).

Пусть на линейке длины n (*см*) поставлено k делений. Сколько существует различных отрезков (не отрезков разной длины, а просто различных отрезков) с концами в точках деления или на концах линейки? Так как любая пара из перечисленных точек определяет отрезок, а их $k+2$, то отрезков будет $(k+2)(k+1)/2$. А так как по условию задачи должно получиться n различных длин, а длины некоторых отрезков могут и совпадать, то должно выполняться неравенство

$$n \geqslant \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$

Отсюда следует, что на отрезке длины n необходимо поставить не менее $(\sqrt{8n+1}-3)/2$ делений (если это число не целое, то нужно брать ближайшее к нему большее целое число).

А какого количества делений наверняка хватит? Конечно, $(n-1)$-го хватит (можно нанести все сантиметровые деления), но нельзя ли обойтись меньшим числом?

Попробуем такую расстановку k делений: сначала поставим m делений через каждый сантиметр, затем деление через $(m+1)$ (*см*), снова через $(m+1)$ (*см*) и т. д., пока не поставим все k делений. Рассмотрим теперь линейку с правым концом в $(m+1)$ (*см*) от последнего деления. Длину этой линейки l выразим через k и m:

$$l = m + (k-m)(m+1) + m + 1 = -m^2 + m(k+1) + (k+1).$$

Используя формулу деления с остатком $s = p(m+1) + q$, нетрудно показать, что при любом m такая расстановка делений удовлетворяет условию задачи.

Отметим еще одно важное свойство такой расстановки делений — если отрезок укоротить справа на любое целое число сантиметров, то точки деления по-прежнему будут удовлет-

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$k \geqslant$	0	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4
k	0	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5
$k \leqslant$	0	1	1	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5

Рис. 8.

ворять условию задачи (т. е. можно будет построить все целочисленные отрезки от 1 *см* до новой длины линейки).

Осталось выяснить, насколько большим можно сделать l, меняя m (число делений k фиксировано). Для этого запишем формулу для l в виде

$$l = \frac{(k+1)(k+5)}{4} - \left(m - \frac{k+1}{2}\right)^2.$$

Отсюда видно, что l будет наибольшим при наименьшем $\left(m - \frac{k+1}{2}\right)^2$. Значит, если k нечетно, то надо положить $m = \frac{k+1}{2}$, а если k четно, то надо положить $m = \frac{k}{2}$ или $m = \frac{k+2}{2}$. Итак,

$$l \geqslant \frac{(k+1)(k+5)}{4} - \frac{1}{4} = \frac{k^2+6k+4}{4}.$$

Вместо l можно подставить n. Выразив теперь k через n, получим: $k \leqslant \sqrt{4n+5} - 3$ (если это число не целое, то нужно брать ближайшее к нему большее целое число).

На рисунке 8 изображена таблица, в которой для n от 1 до 15 даны точные значения $k(n)$—наименьшего числа делений, удовлетворяющих условию задачи; полученной нами ранее из формулы $n \geqslant (k+2)(k+1)/2$ оценки снизу и только что выведенной оценки сверху. Видно, что эти значения мало отличаются друг от друга, но с ростом n это отличие становится все больше.

Найти формулу, связывающую точное значение k с n, видимо, весьма непросто. Неясно даже, будет ли функция $k(n)$ монотонной, т. е., если для отрезка длины n достаточно k делений, то достаточно ли их будет для отрезка длины $n - 1$?

Как видите, от школьной задачки до серьезной и трудной математической проблемы — один шаг.

Попробуйте свои силы в решении этих проблем. Ждем ваших писем.

Где ошибка?

Докажем, что $1 = 2$. С одной стороны,

$$1 = \frac{2}{3-1}. \qquad (1)$$

Подставим в правую часть равенства (1) вместо 1 выражение $\frac{2}{3-1}$. Получим

$$1 = \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3-1}}.$$

Проделав эту «подстановку» еще раз, получим

$$1 = \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3-1}}}. \qquad (2)$$

Повторив ту же «подстановку» бесконечное число раз, получим равенство

$$1 = \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \dots}}}. \qquad (3)$$

С другой стороны,

$$2 = \frac{2}{3-2}. \qquad (4)$$

Подставим в правую часть равенства (4) вместо 2 выражение $\frac{2}{3-2}$. Получим

$$2 = \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3-2}}.$$

Проделав эту «подстановку» еще раз, получим

$$2 = \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3-2}}}. \qquad (5)$$

Повторив ту же «подстановку» бесконечное число раз, получим равенство

$$2 = \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \dots}}}. \qquad (6)$$

Правые части равенств (3) и (6) одинаковы. Следовательно, должны быть равны между собой и левые части: $1 = 2$.

Ю. Гайдук

В. Лешковцев

ВЫДАЮЩИЙСЯ СОВЕТСКИЙ ОПТИК

К 100-летию со дня рождения Д. С. Рождественского

«Это было в тяжелые годы гражданской войны. Транспорт работал в Петрограде с перебоями. Иногда он совсем замирал. В эти дни за Невской заставой можно было увидеть немолодого седобородого человека, который, опираясь на палку, шел ровным, неторопливым шагом. Он шел пешком с Васильевского острова, с противоположного конца города, где жил в небольшой университетской квартире, чтобы вместе с товарищами принять участие в налаживании производства оптического стекла. Что гнало пожилого профессора в заводскую лабораторию из руководимого им института, где тоже хватало работы? Не тот ли священный огонь науки, что перевоплощает ученого в борца и не дает иссякнуть человеческим силам?» *).

Познакомимся поближе с этим удивительным человеком.

Дмитрий Сергеевич Рождественский родился 7 апреля 1876 года в Петербурге, в семье талантливого русского педагога Сергея Егоровича Рождественского, по учебникам русской истории которого обучалось несколько поколений гимназистов. Он получил хорошее домашнее воспитание, прекрасно владел немецким, английским и французским языками и окончил гимназию с серебряной медалью (подвела четверка по русскому языку и литературе на выпускных экзаменах). Его любимыми предметами были физика, химия и биология, и он сохранил эту любовь на всю жизнь.

В 1894 году он поступил на естественное отделение Петербургского университета и в течение года изучал биологию и химию. Но интерес к физике победил, и сдав положенные экзамены, Рождественский вновь поступил на первый курс теперь уже математического отделения, где изучали также механику, физику и астрономию. Занимаясь в университете, он посещал далеко не все лекции (тогда это разрешалось студентам), но зато много работал самостоятельно. Правда, потом он жалел, что посещал мало лекций, и считал, что надо было бы ходить хотя бы на все лекции по физике, которые сопровождаются демонстрационными опытами. Он придавал очень большое значение этим опытам и однажды, уже будучи профессором в том же университете, отменил в последний момент лекцию, когда убедился, что демонстрационные эксперименты плохо подготовлены.

Потеряв год в начале университетских занятий, он вынужден был сделать то же самое и на последнем курсе. Случилось так, что в 1899 году, перед самой сдачей выпускных экзаменов, в университете началась студенческая забастовка. Царское правительство отдало распоряжение проводить экзамены под охраной поли-

*) А. Н. Осиновский, А. Ф. Коноиков. Д. С. Рождественский. М., «Просвещение», 1974, с. 3.



Д. С. Рождественский (1876—1940).

ции. Многие студенты, и среди них Д. С. Рождественский, отказались сдавать экзамены в присутствии полицейских. В следующем году он получил диплом с отличием и был оставлен в университете, как тогда говорили, для подготовки к профессорскому званию.

В качестве узкой специальности он выбрал оптику, хотя научных руководителей в этой области физики в университете не оказалось. Более того, большинство университетских профессоров считало, что их дело преподавать, а не заниматься наукой. Но Дмитрий Сергеевич, по его же словам, «наплевал на эти взгляды... и начал работать». Самостоятельность и независимость в науке были главными чертами его личности.

Работать в одиночку, конструируя и собирая необходимую для опытов аппаратуру, было нелегко даже такому упорному и трудолюбивому человеку. Поэтому начатые в 1903 году исследования были оформлены в виде магистерской диссертации и защищены только в 1912 году. Правда, тремя годами позже он уже защитил докторскую диссертацию и вскоре был избран заведующим Физическим институтом Петроградского университета. Это был редкий случай в русской физике, когда кому-то удавалось внести крупный вклад в мировую науку, оставаясь у себя дома, в России. Заканчивая послужной список Д. С. Рождественского, укажем, что в 1925 году он был избран членом-корреспондентом Академии наук, а в 1929 году — академиком.

Чем же обогатил науку этот выдающийся советский ученый?

Он начал свои исследования с изучения аномальной дисперсии света в парах щелочного металла натрия. В знаменитом опыте Ньютона свет, проходя через стеклянную призму, разлагался в цветной спектр. Из этого опыта следует, что показатель преломления зависит от цвета (или от длины волны). Эту зависимость называют дисперсией. Так как призма в опыте Ньютона сильнее всего преломляет фиолетовые лучи и слабее всего красные, мы можем утверждать, что преломление тем сильнее, чем меньше длина волны. Для прозрачных тел в видимой области спектра зависимость показателя преломления от длины волны достаточно хорошо описывается следующей формулой:

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2},$$

где a и b — постоянные величины, характеризующие данное вещество. Такая зависимость называется нормальной дисперсией.

Но еще в 1862 году французский физик Леру, пропуская свет сквозь призму, наполненную парами йода, обнаружил нарушение этой закономерности. Пары йода сильно поглощают свет нескольких определенных длин волн. Разложив свет, который прошел через эти пары, в спектр,

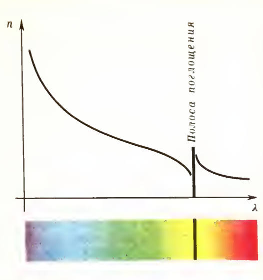


Рис. 1.

мы увидим в нем ряд темных линий — их называют линиями поглощения. Оказалось, что вблизи этих линий коэффициент преломления у более длинных волн выше, чем у более коротких. Аналогичное явление наблюдается при прохождении света сквозь пары натрия (рис. 1) и других веществ, у которых линии поглощения лежат в видимой области спектра. Это явление получило название аномальной дисперсии. Теория аномальной дисперсии была создана немецким физиком Зельмейером еще в 1871 году, но долгое время не имела надежной экспериментальной проверки. Определение показателя преломления вблизи линий поглощения оказалось необычайно сложным делом из-за сильного поглощения света.

Д. С. Рождественский разработал оригинальный метод точного определения показателя преломления не только вблизи линии поглощения, но даже внутри самой линии. Полученные им данные об изменении показателя преломления вблизи линий поглощения паров натрия подтвердили справедливость теории Зельмейера. Но у этой работы был еще более важный результат. Метод Рождественского позволяет точно определить отношение интенсивностей двойных спектральных линий (дублетов), или, как говорили в то время, отношение чисел вибраторов, излучающих каждую из этих линий. Оказалось, что у многих веществ отношение интенсивностей соседних линий в дублетах выражается небольшими целыми числами. Рождественский определил величины этих отношений для большинства дублетов щелочных металлов и показал, что они не зависят ни от температуры, ни от давления паров, а определяются свойствами самих атомов исследуемых веществ. В докторской диссертации он писал об этом так: «Найденные простые отношения должны, очевидно, соответствовать какой-то очень простой черте в строении атомов и молекул. Но в чем заключается эта простота, при современных данных об атомах еще решить невозможно». Напомним читателям, что это было написано в самом начале 1915 года, когда теория атома, предложенная Нильсом Бором, делала еще первые шаги.

Как показала в дальнейшем квантовая механика, отношение интенсивностей характеризует вероятности перехода электронов с одной орбиты атома на другую и является очень важной характеристикой атома. Один из учеников Рождественского профессор В. К. Прокофьев так охарактеризовал значение работ своего учителя: «Излучение атомов, спектральные линии характеризуются двумя величинами: длиной волны и интенсивностью. Закономерности для длин волн спектральных линий установлены Бором в Копенгагене. Метод определения их интенсивностей дан на другом конце Европы — в Петрограде».

Первоначально теория Бора объясняла только строение атома водорода и однократно ионизированного атома гелия, у которого в электронной оболочке остается всего один электрон. В труднейшие годы гражданской войны и интервенции, голода и хозяйственной разрухи, в неимо-

верно неблагоприятных для занятия наукой условиях, да еще при полной изоляции от всей мировой науки, Д. С. Рождественский нашел основные идеи дальнейшего развития теории Бора. В научном докладе на тему «Спектральный анализ и строение атома», который он прочитал в 1919 году, на праздновании первой годовщины Государственного оптического института, Рождественский четко сформулировал основные положения, благодаря которым теория Бора была применена сначала к спектрам атомов щелочных металлов с одним электроном во внешней оболочке, а затем и к спектрам любых атомов.

Как выяснилось впоследствии, такие же идеи были использованы Арнольдом Зоммерфельдом, Эрвином Шредингером и рядом других выдающихся зарубежных физиков при развитии и совершенствовании теории Бора.

Претворяя в жизнь свои идеи, Рождественский осуществил классический анализ спектра иона магния, линии которого близки к линиям нейтрального атома щелочного металла натрия. Эта работа послужила образцом для многочисленных анализов спектров ионов различных элементов, выполненных в последующие годы.

Д. С. Рождественский внес крупный вклад и в теорию микроскопа. Изобретенный еще в XVII веке, микроскоп вскоре нашел множество разнообразных применений. Однако теория этого важного оптического прибора была создана только в начале нашего века. Геометрическая оптика позволяет рассчитать увеличение микроскопа. Но она не может дать ответ на вопрос о том, каковы предельно малые размеры тела, которые еще можно увидеть при помощи микроскопа. (Ведь мы знаем, например, что обычный микроскоп не позволяет увидеть атомы и молекулы.) Она также ничего не может нам сообщить о характере и происхождении дифракционных и интерференционных полос,

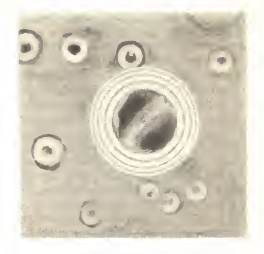


Рис. 2. Интерференционные круги у крахмального зерна картофеля в воде. Диаметр зерна равен 9 микронам.

сопровождающих (и искажающих) изображение объектов в микроскопе (рис. 2). Для этого нужна теория, учитывающая взаимодействие световых волн, отраженных рассматриваемыми в микроскоп объектами. Автором первой такой теории был немецкий физик-оптик Аббе. Но теория Аббе относилась к специальному случаю, когда рассматриваемый объект освещается пучком когерентных лучей. Такие лучи имеют одинаковую длину волны и неизменную разность фаз колебаний. На практике этот случай обычно не реализуется. Другой предельный случай в теории микроскопа рассмотрел советский физик академик Л. И. Мандельштам. В этом случае изучаемый объект сам светится некогерентным светом. Обе эти теории учитывали только дифракционные явления. Д. С. Рождественский создал теорию микроскопа, работающего в условиях обычного освещения. В ней учитывались также и интерференционные эффекты. При этом он нашел практические пути повышения эффективности микроскопических исследований.

Дмитрий Сергеевич был не только физиком, но и глубоко образованным ботаником. Он много и охотно

работал с микроскопом. В статье «Чем овладел и что должен завоевать микроскоп» он писал о Левенгуке: «Он сам плавил стекло, сам шлифовал, сам полировал, сам монтировал лупы между серебряными и золотыми дисками.., сам искал и находил объекты наблюдения. Подчеркиваю это потому, что в микроскопии творит новое и совершенное тот, кто знает, для чего творит и что ищет». Эти же слова могли бы характеризовать и работы Рождественского. Какой бы областью исследований он ни занимался, он стремился войти в нее «до конца», со всеми ее тонкостями и деталями. Так в свое время он глубоко проник во все детали оптического производства и сам учился у мастера-оптика Александрова шлифовать точные оптические поверхности.

Заслуги Д. С. Рождественского в развитии советской физики далеко не исчерпываются его личным вкладом в науку. Он был не только очень крупным ученым, но также прекрасным учителем и организатором науки.

В своей педагогической деятельности Рождественский очень высоко ценил и стремился всячески развивать самостоятельность в работе студентов. В лекциях он старался останавливаться прежде всего на принципиальных проблемах и на том, чего не было в учебниках, чтобы студенты сами потом разбирали более простые и хорошо известные разделы науки.

Смело вовлекая молодежь в самостоятельные научные исследования, он создал талантливую школу советских физиков. К числу его учеников относятся академики А. А. Лебедев, И. В. Обреимов, Д. В. Скобельцын, А. Н. Теренин, В. А. Фок, члены-корреспонденты АН СССР Е. Ф.Гросс, С. Э. Фриш и многие другие известные ученые.

Рождественский принадлежал к числу передовых русских ученых, которые стремились поставить науку на службу народу. Поэтому он с энтузиазмом встретил Великую Октябрьскую социалистическую революцию, понимая, какие огромные возможности развития науки она открывает перед учеными. В первые же месяцы после революции он старательно трудился над объединением усилий разрозненных и весьма малочисленных групп петроградских физиков-оптиков и вскоре внес в Народный комиссариат просвещения детально разработанный проект создания научного центра нового типа — Государственного оптического института (ГОИ). В нем он писал: «...при скромных средствах университетских физических лабораторий, при слабом развитии оптической промышленности в России централизация работников по оптике при государственной широкой поддержке необходима и для чисто научных задач, и для правильного направления и подъема деятельности оптической техники и промышленности. Необходим оптический институт». Проектом предусматривалась также организация при институте двух подчиненных ему предприятий — завода по производству оптического стекла и завода оптической аппаратуры. Советское правительство поддержало эту идею, и 6 мая 1919 года нарком просвещения А. В. Луначарский подписал декрет об учреждении Государственного оптического института.

Шла война. Молодая Красная Армия остро нуждалась в биноклях, стереотрубах, оптических прицелах для орудий. А в стране негде было купить даже простые очки. Царская Россия не имела своей оптической промышленности и ввозила оптические приборы из-за границы, главным образом из Германии, где имелись знаменитые заводы Цейса. Именно на них работал Аббе, который, по словам Рождественского, оптическим снаряжением немецкой армии почти выиграл первую мировую войну. В России же никто даже не знал технологии приготовления оптического стекла. Все это приходилось созда-

вать и разрабатывать заново, практически на пустом месте. Но благодаря Государственному оптическому институту эти работы развивались так успешно, что уже к 1927 году наша страна полностью прекратила закупку оптического стекла за рубежом. Советская оптическая промышленность наладила производство не только биноклей и стереотруб, но и микроскопов, спектрографов, телескопов и другой сложной научной аппаратуры.

Грандиозная научно-техническая революция, происходящая в настоящее время, необычайно усложнила связь науки и производства. Наука теперь играет огромную роль в жизни общества, она стала непосредственной производительной силой, которая готовит революционный переворот во всех современных производствах — и в металлургии, и в машиностроении, и на строительных площадках, и на колхозных и совхозных полях. Эти перемены потребовали коренной перестройки производства, укрупнения и объединения предприятий, создания фирм и научно-производственных объединений. В докладе А. Н. Косыгина на XXV съезде КПСС по этому поводу сказано следующее: «В десятой пятилетке создание производственных объединений в промышленности будет завершено. Объединения — это качественно новое явление в управлении промышленным производством. Они представляют собой не механическое соединение предприятий, а единый производственно-хозяйственный комплекс, в котором органически слиты наука и производство, широко развиты специализация и кооперирование».

Д. С. Рождественский придавал большое значение взаимодействию науки с производством. Так, в 1936 году он писал: «Мы одерживаем над старым миром одну победу за другой. Мы становимся на первое место в ряде отраслей промышленности и непрерывно завоевываем все новые первые места... Теперь на очереди у нас — организовать свою науку, показать нашу силу в науке и, главное, в научной организации промышленности. Особенно в такой промышленности, какова оптическая, так как она не отделима от оптической науки».

Не удивительно, что Государственный оптический институт оказался в числе инициаторов создания научно-производственных объединений. Организованное по его инициативе более 10 лет назад Ленинградское оптико-механическое объединение, в состав которого, кроме ГОИ, входят специальные конструкторские бюро, оптические заводы и другие подразделения, работает весьма успешно. Недавно в объединении создан самый крупный в мире оптический телескоп с диаметром зеркала 6 метров.

Нам хочется закончить эту статью смелой и дальновидной мечтой, которую Д. С. Рождественский высказал еще в 1919 году, в конце своей речи на праздновании первой годовщины ГОИ.

«Видение уже недалекого будущего рисуется глазам. Каждый атом известен, возможности соединений в молекулы исследованы и могут быть рассчитаны во всякий момент. Химия уже более не экспериментальная, а теоретическая наука. Как рядовой архитектор в справочной книжке находит метод расчета построек, так рядовой химик, сидя в своем кабинете, по определенным уравнениям и таблицам находит методы осуществления сложнейших, необходимых для жизни химических соединений. Это власть над природой, подчинение ее человеку в мере почти непостижимой — в ней сущность и душа техники. Ее даст знание атома... мы и предугадать не можем, как преобразится жизнь человека в ближайшие десятилетия, когда загадка атома будет разгадана, когда тысячи, десятки тысяч ученых приложат волю к разрешению наряду с другими задачами этой, быть может, важнейшей, когда наука ежечасно будет приближаться к жизни.»

Д. Рождественский

ЭВОЛЮЦИЯ УЧЕНИЯ О СТРОЕНИИ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

Мы приводим здесь часть доклада, который академик Д. С. Рождественский сделал 15 ноября 1932 года на юбилейной сессии Академии наук, посвященной пятнадцатилетию Великой Октябрьской социалистической революции. Публикацию подготовил В. Лешковцев.

Не было эпохи в истории физики, когда развитие ее шло бы так быстро и решительно, как в последние 15—20 лет. В это время была возведена новая и чудесная постройка научной мысли, решена была загадка строения атомов...

Постройка атома воздвигалась быстро в связи с тем, что огромные запасы материалов были уже поднесены и горами лежали в порядке, ожидая строителя. Периодические свойства атомов, после вековой работы химиков уложенные Менделеевым в законченную систему, до сих пор сохранившую почти весь свой первоначальный облик, требовали теоретического обоснования. Десятки тысяч работ по спектральному анализу, точнейшие закономерности в спектрах, казалось, с очевидностью указывали, где и как нужно вести стройку. Но строитель запоздал. И теперь мы знаем, почему.

Лучшие умы того времени безуспешно пытались приложить свои руки к укладке фундамента. Рэлей писал о своем бессилии. Ритц, всю свою недолгую жизнь глубокого исследователя посвятивший теории спектрального анализа, не нашел пути. Несомненно, теоретиками, прославившимися на переломе столетия, было передумано гораздо больше, чем написано, так как бесплодность попыток обнаруживалась с первых же шагов.

Всем известна последняя блестящая теория Дж. Дж. Томсона. Ему удалось построить модель атома химического. Внутри широкой, положительно заряженной по всему объему сферы правильно расставлены электроны. Их силы притяжения и отталкивания взаимно уравновешиваются, они неподвижны. Этого требует классическая электродинамика, так как всякое движение равносильно излучению, потере энергии, а запас энергии в атоме не может не быть постоянным. Эта модель атома удачно подчеркивала восьмикратную периодичность системы Менделеева и потому пользовалась выдающимся успехом. Но перед законами спектрального анализа и она оказалась бессильной. А опыты Резерфорда по рассеянию α-частиц ... показали знакомую нам картину легких электронов, окружающих тяжелое ядро в числе, равном номеру элемента.

Но почему не падают электроны на ядро, нейтрализуя его заряд, если движение им воспрещено? Этот узел дано было разрубить Нильсу Бору. В июле 1913 года он провозгласил два принципа, которые не только прочно утвердили познание атома, но и произвели сдвиг в основах физики.

Чтобы сделать это, нужна была смелость, почти дерзость.

Вопреки законам электродинамики, электроны совершают планетарное движение вокруг ядра и все-таки не излучают энергии. Эти особые состояния атома, эти формы движения даются квантовыми законами. Каждое состояние отличается от соседнего на один квант действия.

Так требует первый принцип Бора. Он рвет с классическими законами лучеиспускания, поглощения, дисперсии, в итоге чего получаются две оптики: квантовая оптика атомов и классическая оптика давно изученных явлений...

Второй принцип гласит, что излучение происходит только при переходе электрона из одного состояния в другое и притом так, что излучается строго монохроматическая волна, а излучаемая энергия, деленная на частоту колебаний, опять равна одному кванту действия.

Этот квант действия, впервые введенный в науку Планком, и далее все время будет маяком, который направит на истинный путь, но на первых шагах оба принципа кажутся столь искусственными, столь непривычными, как будто придуманными нарочно, что первое движение — оттолкнуть, не принять их. Но сделать этого уже нельзя. Выведенная между линиями водородного спектра связь, точнейшая формула Бальмера, оправдывается до деталей. Целочисленные законы получают смысл. Непонятные ранее звездные спектры ионизированного гелия уясняются. Даже с самых первых шагов теории периодичность химической валентности, хотя и туманно, намечается. Сразу обрисовался такой комплекс ясного и связанного, что нельзя от него отказаться.

Теперь мы знаем, почему запоздал строитель. Оба принципа Бора революционны. Привести к ним могло только глубокое переживание квантовых основ явлений, длительная ассимиляция идей Планка и, как скоро увидим, Эйнштейна ...

Но новая связь между законами— квантовая связь. С самого начала она отказывается от конкретности. Она ведет баланс энергии, но не анализирует процесса. Квантовые состояния электрона в атоме соответствуют определенным орбитам движения. Каждая орбита характеризуется неизменным запасом энергии, уровнем энергии. Взаимодействия атома с внешним миром происходят, согласно второму принципу, или с излучением, или с поглощением светового кванта. Возможно столкновение с другим электроном, когда скачком две системы обмениваются одним квантом действия, и потому скачком энергия переносится из одной системы в другую. Но при этом полный отказ расчленить этот скачок — излучение, поглощение, столкновение; регистрируется лишь баланс энергии. Это уже много, здесь открывается возможность классифицировать уровни энергии, наблюдать, как идет процесс в ту или другую сторону. Но кинематика и динамика переходных стадий, то, над чем так напряженно работала старая физика, остаются не только туманными, но просто совершенно закрытыми...

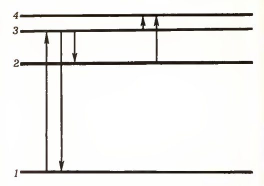
В это время с особым значением выступают мысли Эйнштейна о фотоэлектрическом эффекте, высказанные еще в 1905 году. Сущность их следующая. Падая на вещество, свет вырывает из него электроны, и при самом слабом свете скорость вырванных электронов все же одинакова. От интенсивности его зависит лишь число вырванных электронов. Ясно, что здесь мы имеем те же элементарные акты ионизации, выбрасывания электрона одним квантом света на бесконечно удаленный уровень в отдельных атомах. Скорость выбрасываемого электрона вычисляется из баланса энергии в духе второго принципа Бора.

Самый процесс ионизации и здесь остается неизвестным. Свет падает квантами. Они отдельны, индивидуальны, эти мельчайшие комки света. И если это так, то что же такое ин-

тенсивность света? Она пропорциональна числу падающих квантов. Эта мысль была отчетливо высказана Эйнштейном. Ее логическое развитие требует признания, что интенсивность света пропорциональна вероятности падения кванта света, а отсюда — что кванты света распространяются по каким-то непонятным пока законам вероятности. Забегая вперед, можно сказать, что подобный ход мысли теперь (в 1932 году) является для нас естественным, но тогда он не был в сознании даже Эйнштейна. Наоборот, он пишет: «... волновая теория света столь прекрасно оправдалась в описании оптических явлений, что она, конечно, никогда не будет заменена другой теорией». И, несомненно, тогда еще не была подготовлена почва; самое понятие о кванте света было революционным. Как известно, квант-комок или квант-игла далеко не сразу были приняты в науке. Они будили сомнение, но не вызывали согласия. Слишком трудно было свойства волны — интерференцию, дифракцию — приписать комку, частице. Бор долго не принимал идеи о кванте света как частице...

Но в первой стадии квантовой теории даже самое понятие о кванте света как частице мало интересовало исследователей. Все мысли заняты были изучением строения атома водорода, анализом действия на него электрического и магнитного полей. В особенности много усилий посвящается изучению упругих и неупругих соударений электронов со всевозможными атомами (знаменитые опыты, начатые Франком и Герцем уже в 1913 году). Они на первых порах служили одним из главных подтверждений принципов Бора. Здесь в особенности стало до конкретности ясно, как каждый атом может существовать в различных состояниях и как налетающий со стороны электрон перекидывает электрон атома с уровня на уровень, всегда отдельным скачком...

Когда мы наблюдаем поглощение



и лучеиспускание монохроматического света одной и той же длины волны, то подобный процесс старая оптика трактует как резонанс. Свет синхронно раскачивает электроны, и они лучеиспускают. Иначе в квантовой теории: поглощаемый квант света переводит электрон с уровня на уровень, из состояния *1* в состояние *3* (см. рис.). Побыв в состоянии *3*, электрон самостоятельно перескакивает назад в состояние *1*, теряя такой же монохроматический квант, какой раньше был поглощен. Это кажется мало удачной перефразировкой старого воззрения. Но вот оказывается, что есть атомы — и их немало, а молекулы почти все,— где возврат идет из состояния *3* не только в состояние *1*, но и в совсем новое состояние *2*. Если же прибавить, что новым подходящим квантом можно изловить электрон в состояниях *3* или *2* и перевести в состояние *4* и далее таким образом перекидывать электрон, как футбольный мяч, из состояния в состояние, то ясно, что экспериментатор вполне овладел понятием о многочисленных состояниях атомов: квантовой стороной вопроса...

Забегая несколько вперед, можно сказать, что опыты настолько конкретизировали постулаты Бора, что самое название постулата потеряло смысл; утверждения Бора — теперь ясные и необходимые выводы опыта. Это касается в особенности обмена энергии квантами, второго постулата, плодотворность которого была и остается изумительной.



А. Толпыго

Инварианты

В «Кванте» уже писалось о решении задач при помощи подбора инварианта (1976, № 2, с. 32). В данной статье обсуждаются понятие инварианта и ряд возникающих в связи с ним вопросов.

1. Общая постановка задачи

При помощи инвариантов решаются задачи следующего типа: *даны множество M* (элементы его мы будем называть «позициями») *и правило, по которому разрешается переходить от одной позиции к другой; можно ли из данной позиции α перейти за несколько шагов в другую данную позицию β*? Более общая задача: *как для произвольной пары позиций α, β установить, можно ли из α за несколько шагов перейти в β*?

Очевидно, описанные ситуации обладают следующим свойством: если из позиции α можно перейти в позицию β и из β можно перейти в позицию γ, то из α можно перейти в γ. Это свойство называется *транзитивностью*.

Рассмотрим конкретную задачу.

З а д а ч а 1. *Круг разделен на n секторов, в которых как-то расставлены n фишек. Разрешается одновременно передвинуть любые две фишки: одну — на один сектор по часовой стрелке, другую — на один сектор в противоположном направлении. Можно ли из позиции μ, в которой в каждом секторе стоит по одной фишке, перейти к позиции ν, в которой все фишки собраны в каком-нибудь одном секторе?*

В данной задаче, кроме свойства транзитивности, имеет место также следующее важное свойство: если из позиции α можно перейти в позицию β, то и из β можно перейти в α. Это свойство называется *симметричностью*.

Свойство симметричности соблюдается не во всех задачах рассматриваемого типа; например, в шахматах пешки назад не ходят. *В этой статье мы ограничимся задачами, для которых условие симметричности выполнено.*

Условимся считать, что из любой позиции α можно «перейти» в нее же. Это свойство называется *рефлексивностью*.

Назовем позиции α и β *эквивалентными*, если по заданным правилам из α можно перейти в β (ввиду предположенной симметричности это равносильно тому, что из β можно перейти в α). Эквивалентность позиций α и β мы будем обозначать так: $\alpha \sim \beta$; неэквивалентность — так: $\alpha \nsim \beta$.

Поскольку эквивалентность позиций рефлексивна, симметрична и транзитивна, исходное множество M разбивается на непустые непересекающиеся подмножества (рис. 1): $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots$ В каждом из подмножеств M_i все позиции эквивалентны: если $\alpha \in M_i$ и $\beta \in M_i$, то $\alpha \sim \beta$. Если же позиции α и β принадлежат разным подмножествам: $\alpha \in M_i$, $\beta \in M_j$ $(i \neq j)$, то α и β не эквивалентны *). Подмножества M_i мы будем называть *орбитами*. Повторим еще раз: если мы находимся в позиции α, принадлежащей какой-нибудь орбите M_i, то мы можем, перемещаясь по этой орбите, перебраться из позиции α в любую другую позицию, принадлежащую той же

*) «Квант», 1972, № 2, с. 2.

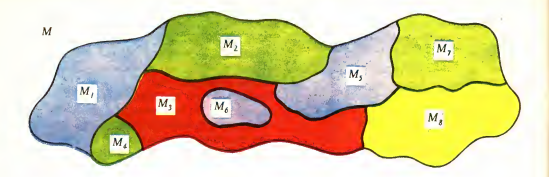


Рис. 1.

орбите. С другой стороны, сойти с этой орбиты, т. е. перебраться с позиции α на позицию β, принадлежащую любой другой орбите, мы не можем.

Орбит может быть как конечное, так и бесконечное число. Впрочем, если множество M конечно, то, разумеется, и число орбит конечно.

2. Инвариант

Числовая функция f, определенная на множестве «позиций» M, называется *инвариантной функцией*, или *инвариантом*, если на эквивалентных позициях она принимает одинаковые значения:

$$\text{если } \alpha \sim \beta, \text{ то } f(\alpha) = f(\beta). \quad (1)$$

З а д а ч а 1 (продолжение). Пусть $n = 2m$. Раскрасим секторы через один в синий и белый цвет. Тогда при каждом перемещении число фишек в белых секторах либо не меняется (рис. 2), либо увеличивается на 2 (рис. 3), либо уменьшается на 2 (рис. 4). Для произвольной расстановки α фишек по секторам обозначим через $б(\alpha)$ число фишек в белых секторах. Рассмотрим теперь такую функцию p:

$$p(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } б(\alpha) \text{ четно}, \\ 1, & \text{если } б(\alpha) \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Из сказанного выше вытекает, что эта функция p (четность числа фишек в белых секторах) является инвариантом. Поскольку $n = 2m$, для конечной позиции ν имеем $p(\nu) = 0$.

Если $m = 2k + 1$, то $\frac{n}{2}$ нечетно.

Значит, для начальной позиции μ имеем $p(\mu) = 1$. Из $p(\mu) \neq p(\nu)$ вытекает, что позиции μ и ν не эквивалентны. Таким образом, в этом случае ($n = 2m$, $m = 2k + 1$) из позиции μ нельзя перейти в позицию ν.

Ну, а если $m = 2k$? Тогда $\frac{n}{2}$ четно и $p(\mu) = p(\nu) = 0$. В этом случае инвариант p не дает возможности установить, эквивалентны позиции μ и ν или нет.

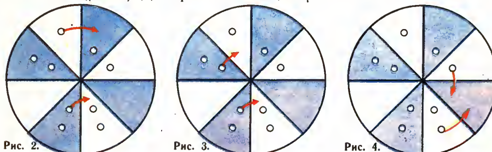


Рис. 2. Рис. 3. Рис. 4.

Дело в том, что если f — инвариант, то из $f(\alpha) = f(\beta)$, вообще говоря, ничего не вытекает. Если $f(\alpha) \neq f(\beta)$, то позиции α и β не эквивалентны (это следует из (1)). Если же $f(\alpha) = f(\beta)$, то позиции α и β могут быть как эквивалентными, так и не эквивалентными: инварианту не запрещается на разных орбитах принимать одинаковые значения. (Например, постоянная функция, т. е. функция, которая на всех элементах из M принимает одно и то же значение, тоже инвариантна.)

Как же быть? Попробуйте для какого-нибудь n вида $4k$ перейти от позиции μ к позиции ν... Почему-то не удается. Попробуем найти другой, более тонкий инвариант.

Занумеруем секторы (скажем, по часовой стрелке) от 1 до n. Для произвольной расстановки α фишек по секторам обозначим через $a_k(\alpha)$ количество фишек в k-м секторе при расстановке α. Рассмотрим теперь такую функцию q:

$$q(\alpha) = 1 \cdot a_1(\alpha) + 2 \cdot a_2(\alpha) + 3 \cdot a_3(\alpha) + \ldots + n \cdot a_n(\alpha). \quad (2)$$

Является ли функция q инвариантом? Произвольное допустимое перемещение (рис. 5) затрагивает 4 слагаемых суммы (2):

$$\ldots + i \cdot a_i(\alpha) + (i+1) \cdot a_{i+1}(\alpha) + \ldots + (j-1) \cdot a_{j-1}(\alpha) + j \cdot a_j(\alpha) + \ldots \quad (3)$$

При перемещении, изображенном на рисунке 5, сумма (3) превратится, очевидно, в сумму

$$\ldots + i \cdot [a_i(\alpha) - 1] + (i+1) \cdot [a_{i+1}(\alpha) + 1] + \ldots + (j-1) \cdot [a_{j-1}(\alpha) + 1] + j \cdot [a_j(\alpha) - 1] + \ldots$$

Легко проверяется, что обе суммы равны. Итак, q — инвариант! Нет, мы забыли, что n-й сектор граничит с первым. Значит, есть еще 3 возможности (рис. 6—8). Подсчет, аналогичный только что сделанному, показывает, что в случае, изображенном на рис. 6, $q(\alpha)$ уменьшится на n, а в случае рисунка 7 — увеличится на n. В третьем случае $q(\alpha)$, конечно, не изменится. Итак, за одно перемещение значение функции q может измениться, но только на n. Следовательно, функция r, значение которой на расстановке α равно остатку от деления числа $q(\alpha)$ на n, есть инвариант.

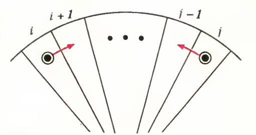


Рис. 5

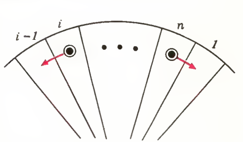


Рис. 6.

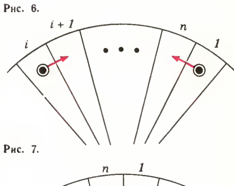


Рис. 7.

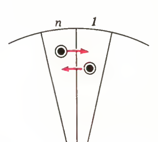


Рис. 8.

Для позиции ν (если все n фишек собраны в l-м секторе)

$$\begin{cases} a_1(\nu) = a_2(\nu) = \ldots = a_{l-1}(\nu) = \\ \qquad = a_{l+1}(\nu) = \ldots = a_n(\nu) = 0, \\ a_l(\nu) = n. \end{cases}$$

Значит, $q(\nu) = l \cdot n$ и $r(\nu) = 0$ (каковы бы ни были n и l). С другой стороны,

$a_1(\mu) = a_2(\mu) = \ldots = a_n(\mu) = 1$.

Значит,

$$q(\mu) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Если $n = 2m$, то $q(\mu) = n \cdot m + m$ и $r(\mu) = m \neq 0$. Следовательно, при четном n получаем $r(\mu) \neq r(\nu)$. Итак, при четном n позиции μ и ν не эквивалентны.

Если же $n = 2m + 1$, то $q(\mu) = n \cdot (m + 1)$ и $r(\mu) = 0$. Таким образом, при нечетном n мы опять имеем: $r(\mu) = r(\nu)$. Получается, что при нечетном n вопрос об эквивалентности позиций μ и ν снова остается открытым.

3. Универсальный инвариант

Назовем инвариант f *универсальным*, если на неэквивалентных позициях он принимает различные значения: если $\alpha \nsim \beta$, то $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Таким образом, для универсального инварианта f

если $f(\alpha) = f(\beta)$, то $\alpha \sim \beta$.

Универсальный инвариант на каждой орбите принимает свое значение. Поскольку для универсального инварианта

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta),$$

универсальный инвариант для любой пары позиций позволяет установить, эквивалентны они или нет.

Как проверить, что некоторый инвариант f универсален? Общего метода не существует. Иногда может помочь следующая простая

Теорема. *Если* a) *существуют такие l позиций $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_l$, что каждая позиция $\alpha \in M$ эквивалентна одной из них и* b) *инвариант f принимает, по крайней мере, l различных значений, то f — универсальный инвариант и позиции δ_i, δ_j $(i \neq j)$ попарно не эквивалентны.*

Из a) вытекает, что существует не более l орбит. Из b) вытекает, что существует не менее l орбит. Следовательно, существует ровно l орбит. Снова из b) вытекает теперь, что инвариант f принимает ровно l значений и, значит, f универсален. Наконец, из a) вытекает, что позиции $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_l$ принадлежат разным орбитам и, таким образом, попарно не эквивалентны.

Задача 1 (окончание). Докажем, что инвариант r универсален. Обозначим через δ_i такую расстановку фишек: одна фишка — в i-м секторе, все остальные — в n-м секторе. Под δ_n мы будем, разумеется, понимать расстановку, при которой все n фишек — в n-м секторе.

Легко сообразить, что любая расстановка эквивалентна одной из позиций $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$. В самом деле, пусть α — произвольная расстановка фишек. Попытаемся собрать все n фишек в n-м секторе. Для этого будем передвигать первую фишку, пока не загоним ее в n-й сектор; одновременно, в соответствии с правилами, мы будем перемещать вторую фишку в противоположную сторону. Затем загоним в n-й сектор вторую фишку, двигая в противоположную сторону третью фишку, и так далее — вплоть до $(n-1)$-й фишки. Когда мы загоним $n-1$ фишек в n-й сектор, n-я фишка будет в каком-то i-м секторе $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Это и означает, что $\alpha \sim \delta_i$.

Посчитаем $r(\delta_i)$. При $i \neq n$:

$$\begin{cases} a_1(\delta_i) = a_2(\delta_i) = \ldots = a_{i-1}(\delta_i) = \\ = a_{i+1}(\delta_i) = \ldots = a_{n-1}(\delta_i) = 0, \\ a_i(\delta_i) = 1, \\ a_n(\delta_i) = n - 1. \end{cases}$$

Следовательно, $q(\delta_i) = i \cdot 1 + n \cdot (n-1)$ и $r(\delta_i) = i$. Кроме того, $q(\delta_n) = n \cdot n$ и $r(\delta_n) = 0$. Итак, инвариант r принимает по крайней мере n значений.

По теореме инвариант r универсален и позиции $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ попарно не эквивалентны.

Поскольку r — универсальный инвариант,

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow r(\alpha) = r(\beta).$$

В предыдущем параграфе мы посчитали, что

$$r(\mu) = r(\nu) \Leftrightarrow n \text{ — нечетное.}$$

Следовательно, $\mu \sim \nu$ тогда и только тогда, когда n — нечетное. Задача, наконец, решена полностью.

Упражнение 1. Докажите, не используя понятия инварианта, что при нечетном n позиции μ и ν эквивалентны.

Упражнение 2. Проверьте, что любая функция от инварианта снова является инвариантом: если f — инвариант и g — произвольная числовая функция, то и функция h

$$h(\alpha) = g(f(\alpha)) \qquad (4)$$

тоже инвариантна.

Упражнение 3. Докажите, что любой инвариант можно представить в виде функции от любого универсального инварианта: если h — инвариант, а f — универсальный инвариант, то существует такая числовая функция g, что выполняется (4).

Упражнение 4. Определим через универсальный инвариант r из задачи 1 два новых инварианта: $f(\alpha) = [r(\alpha)]^2$; $g(\alpha) = [r(\alpha) - 2]^2$. Докажите, что инвариант f универсален, а инвариант g не универсален.

Упражнение 5. Пусть f — универсальный инвариант. Каким условиям должна удовлетворять числовая функция g, чтобы инвариант h, определенный равенством (4), был универсальным?

Задача 2. *Даны* 20 *карточек. На двух карточках написана цифра* 0, *на двух — цифра* 1, ... , *на двух последних — цифра* 9. *Можно ли расположить эти карточки в ряд так, чтобы карточки с* 0 *лежали рядом, между карточками с* 1 *лежала ровно одна карточка*, ... , *между карточками с* 9 *лежало ровно* 9 *карточек*?

Эту задачу можно решить без всяких инвариантов. Однако для нас она интересна тем, что у нее есть два принципиально разных решения, использующих инварианты.

Представим себе 20 ящиков, расположенных в ряд. Переформулируем теперь нашу задачу следующим образом: можно ли расположить карточки по ящикам так, чтобы выполнялись два условия:

a) карточки с 0 лежат в соседних ящиках, карточки с 1 — через один ящик, ... , карточки с 9 — через девять ящиков;

b) в каждом ящике лежит по одной карточке?

Очевидно, порознь выполнить каждое из условий очень легко. Это и приводит к двум решениям.

Первое решение. Положим в первый ящик 10 карточек: одну — с 0, одну — с 1, ... , одну — с 9. Затем вторую карточку с 0 положим во второй ящик, вторую карточку с 1 — в третий ящик, ... , вторую карточку с 9 — в одиннадцатый ящик. Условие a) выполняется. Мы хотим попытаться, не нарушая его, так переложить карточки, чтобы условие b) тоже выполнялось. Разрешим перекладывать любые две «одноименные» (с одной и той же цифрой) карточки через одинаковое число ящиков. Нетрудно заметить, что при произвольном разрешенном перемещении сдвиг в сумме происходит на четное число ящиков. Это подсказывает идею взять в качестве инварианта остаток от деления на 2 суммы номеров ящиков, в которых лежат карточки.

Упражнение 6. Закончить намеченное решение.

Второе решение. Положим в первый и второй ящики карточки с 0, в третий и четвертый — карточки с 1, ... , в девятнадцатый и двадцатый — карточки с 9. На этот раз выполнено условие b). Разрешим менять местами любые две карточки. При таком перемещении расстояние между восемью парами «одноименных» карточек не меняется, между двумя — меняется; таким образом, сумма всех этих расстояний...

Упражнение 7. Закончить решение.

4. Полная система инвариантов

Иногда вместо универсального инварианта проще найти и использовать полную систему инвариантов. Система инвариантов $\langle f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$ называется *полной*, если равенства

$$\begin{cases} f_1(\alpha) = f_1(\beta), \\ f_2(\alpha) = f_2(\beta), \\ \vdots \\ f_k(\alpha) = f_k(\beta) \end{cases} \qquad (5)$$

имеют место одновременно тогда и только тогда, когда позиции α и β эквивалентны.

В чем суть этого определения? Если позиции α и β эквивалентны, то, поскольку $f_1, f_2, \ldots, f_k$ — инварианты, каждое из равенств системы (5) все равно выполняется. «В эту сторону» полнота еще ни при чем. Если бы инварианты $f_1, f_2, \ldots, f_k$ были универсальными, то эквивалентность позиций α и β вытекала бы из любого равенства системы (5). Нам не дана их универсальность, но зато требуется, чтобы одновременное выполнение равенств системы (5) влекло эквивалентность позиций α и β. Именно в этом суть понятия полноты. Таким образом, хотя некоторые из инвариантов $f_1, f_2, \ldots, f_k$ могут на неэквивалентных позициях α, β принимать одинаковое значение, значения набора $\langle f_1, f_2, \ldots, f_k \rangle$ на них различны.

Полная система инвариантов — это обобщение понятия универсального инварианта: если f — универсальный инвариант, то система $\langle f \rangle$, состоящая из одного инварианта, конечно, полна.

Задача 3. *В таблице 2×2 записываются целые числа. Разрешается, во-первых, в любом столбце одновременно: к одному числу прибавить 2, из другого — вычесть 2 и, во-вторых, в любой строке одновременно: к одному числу прибавить 3, из другого — вычесть 3. Какие таблицы эквивалентны?*

Рассмотрим три функции: для любой таблицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

обозначим через $p(\alpha)$ сумму $a + b + c + d$, через $q(\alpha)$ — остаток от деления числа $a + b$ на 2 и через $r(\alpha)$ — остаток от деления числа $a + c$ на 3. Функции p, q, r являются инвариантами. Не очень трудно доказать, что произвольная таблица α эквивалентна таблице

$$\begin{pmatrix} 0 & q(\alpha) \\ r(\alpha) & p(\alpha) - q(\alpha) - r(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, из равенств

$$\begin{cases} p(\alpha) = p(\beta), \\ q(\alpha) = q(\beta), \\ r(\alpha) = r(\beta) \end{cases} \qquad (6)$$

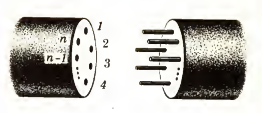


Рис. 9.

вытекает, что таблицы α и β эквивалентны одной и той же таблице и, значит, эквивалентны между собой. И обратно: эквивалентность таблиц α и β влечет равенства (6), поскольку p, q и r — инварианты. Таким образом, $\langle p, q, r \rangle$ — полная система.

Упражнение 8. Решите задачу для таблиц $n\times n$, в которых разрешаются те же преобразования, что и в задаче 3. Естественно ожидать полную систему из $2n-1$ инвариантов.

Упражнение 9. Если $f_1, f_2, \ldots, f_k$ — инварианты и g — числовая функция от k аргументов, то функция h:

$$h(\alpha) = g(f_1(\alpha), f_2(\alpha), \ldots, f_k(\alpha)) \qquad (7)$$

является инвариантом (ср. с упражнением 2). Проверьте.

Упражнение 10. Если h — инвариант, а $\langle f_1, f_2, \ldots, f_k \rangle$ — полная система инвариантов, то существует такая числовая функция g от k аргументов, что выполняется (7) (ср. с упражнением 3). Докажите.

Упражнение 11. Множество M — множество точек числовой плоскости, то есть множество пар $\langle x, y \rangle$ действительных чисел. Единственный допустимый переход: $\langle x, y \rangle \to \langle y, x \rangle$. Пусть

$$\begin{cases} f_1(x, y) = xy, \\ f_2(x, y) = x + y. \end{cases}$$

Доказать, что $\langle f_1, f_2 \rangle$ — полная система инвариантов.

Упражнение 12. Множество M — множество точек пространства или множество троек $\langle x, y, z \rangle$ действительных чисел. Разрешены переходы $\langle x, y, z \rangle \to \langle y, x, z \rangle$ и $\langle x, y, z \rangle \to \langle x, z, y \rangle$. Пусть

$$f_1(x, y, z) = xyz,$$
$$f_2(x, y, z) = xy + yz + zx,$$
$$f_3(x, y, z) = x + y + z.$$

Доказать, что $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ — полная система инвариантов.

Упражнение 13. Множество M состоит из всевозможных наборов (или кортежей) $\langle x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \rangle$ действительных чисел (n фиксировано). Разрешается менять местами любые два соседних числа. Найти полную систему инвариантов.

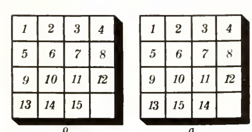


Рис. 10.

В отличие от задач 1 — 3, которые были просто задачами олимпиадного типа, упражнения 11—13 играют важную роль в алгебре многочленов. Инварианты в них интересны не для решения вопроса об эквивалентности (который ясен и без них), а сами по себе — как полезные функции.

Упражнения

14. Даны розетка с n дырками и электронная лампа с n штырями. Дырки занумерованы от 1 до n (рис. 9). Можно ли занумеровать штыри от 1 до n так, чтобы при любом включении в розетку один из штырей попадал в дырку со своим номером?

15. Многие знают «игру в 15»: в коробочке 4×4 лежат 15 шашек с номерами от 1 до 15; разрешается за один ход передвинуть в пустую клетку одну из шашек, соседних с ней. Можно ли превратить положение ρ в положение σ (рис. 10)?

Найдите для этой игры универсальный инвариант.

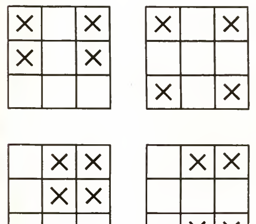


Рис. 11.

16. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

17. Испанский король решил перевесить по-своему портреты своих предшественников в круглой башне замка. Однако он хочет, чтобы за один раз меняли местами только два портрета, висящих рядом, причем это не должны быть портреты королей, один из которых царствовал сразу после другого. Кроме того, ему важно лишь взаимное расположение портретов, и два расположения, отличающиеся поворотом круга, он считает одинаковыми. Доказать, что, как бы сначала ни висели портреты, король может по этим правилам добиться любого нового их расположения.

18. Все целые числа от 1 до $2n$ выписаны в строчку. Затем к каждому числу прибавили номер того места, на котором оно стоит Доказать, что среди полученных сумм найдутся хотя бы две, дающие при делении на $2n$ одинаковый остаток.

19. Вернемся к задаче 1 с фишками в круге и разрешим теперь двигать две фишки как в разные стороны, так и в одну сторону. Найти для этой задачи универсальный инвариант.

20. В таблице 3×3 расставлены числа $+1$ и -1. Разрешается менять знак одновременно у всех элементов строки или столбца. Докажите, что:

a) число орбит равно 16;

b) каждая орбита содержит ровно 32 элемента;

c) произведение всех чисел любого квадрата 2×2 в таблице является инвариантом;

d) произведения чисел в четырех квадратах, указанных на рисунке 11, образуют полную систему инвариантов.

Решать эти задачи можно в любом порядке; ясно, что одни помогают другим.

21. Вектор $\langle a, b\rangle$, где a, b — целые числа, разрешается заменять одним из векторов $\langle a+b, b\rangle$, $\langle a-b, b\rangle$, $\langle b, a\rangle$.

Найти универсальный инвариант (ср. с задачей M420).

22. Пару векторов $\langle a, b\rangle$, $\langle c, d\rangle$, где a, b, c, d — целые числа, разрешается заменять на одну из пар $\langle a+b, b\rangle$, $\langle c+d, d\rangle$; $\langle a-b, b\rangle$, $\langle c-d, d\rangle$; $\langle b, a\rangle$, $\langle d, c\rangle$. Найти полную систему инвариантов.

задачник кванта

Задачи

М416 — М420; Ф428 — Ф432

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 февраля 1977 г. по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М416» или «... Ф428». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи Ф428, Ф429 и Ф432 предлагались на IX Международной олимпиаде по физике.

М416. На плоскости даны n точек $A_1, \ldots, A_n$, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Какое наибольшее число отрезков с концами в этих точках можно провести так, чтобы не получилось ни одного треугольника с вершинами в этих точках?

А. Григорян, М. Примак, С. Фишбейн

М417. На поверхности куба с ребром 1 расположена замкнутая ломаная линия. На каждой грани куба находится по крайней мере одно звено ломаной. Докажите, что длина ломаной не меньше $3\sqrt{2}$.

В. Произволов

М418. Докажите, что для любого натурального n выполняются неравенства:

$$n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right)\leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\leqslant$$

$$\leqslant 1+n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right).$$

М419. В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдется кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежат не менее 10 из данных точек.

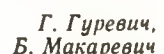
А. Гейн

М420. а) Из дроби $\frac{a}{b}$ разрешается получить любую из трех дробей $\frac{a-b}{b}$, $\frac{a+b}{b}$, $\frac{b}{a}$. Можно ли такими преобразованиями из дроби $\frac{1}{2}$ получить дробь $\frac{67}{91}$?

б)* Из пары дробей $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$ разрешается получить любую из трех пар $\left(\frac{a+b}{b}, \frac{c+d}{d}\right)$, $\left(\frac{a-b}{b}, \frac{c-d}{d}\right)$,

$\left(\frac{b}{a}, \frac{d}{c}\right)$. Можно ли из пары дробей $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{7}\right)$ получить следующие пары: $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right)$; $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$; $\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{8}\right)$; $\left(\frac{5}{19}, \frac{13}{50}\right)$; $\left(\frac{39}{50}, \frac{60}{77}\right)$? (Здесь мы рассматриваем дробь a/b просто как пару взаимно простых чисел: допускаются «дроби», у которых в числителе или знаменателе стоят отрицательные числа или нуль.)

в)* Постарайтесь выяснить, какие вообще дроби (соответственно пары дробей) можно получить из данных в задачах а) и б).



Г. Гуревич,
Б. Макаревич

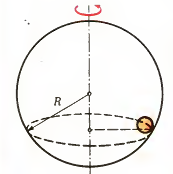
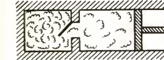
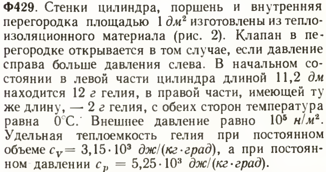


Рис. 1.

Ф428. Сфера радиуса $R = 0,5$ *м* вращается вокруг ее вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью $\omega = 5$ *рад/сек* (рис. 1). Вместе со сферой на ее внутренней поверхности вращается небольшое тело, находящееся на высоте, равной половине радиуса.

1) Определить минимальное значение коэффициента трения, при котором это состояние возможно.
2) Определить минимальное значение коэффициента трения, если угловая скорость сферы равна $\omega = 8$ *рад/сек*.
3) Исследовать устойчивость состояний в случае вышенайденных значений коэффициента трения при: а) малых изменениях положения тела; б) малых изменениях угловой скорости сферы.


Рис. 2.



Ф429. Стенки цилиндра, поршень и внутренняя перегородка площадью 1 *дм*² изготовлены из теплоизоляционного материала (рис. 2). Клапан в перегородке открывается в том случае, если давление справа больше давления слева. В начальном состоянии в левой части цилиндра длиной 11,2 *дм* находится 12 *г* гелия, в правой части, имеющей ту же длину, — 2 *г* гелия, с обеих сторон температура равна 0°С. Внешнее давление равно 10^5 *н/м*². Удельная теплоемкость гелия при постоянном объеме $c_V = 3,15 \cdot 10^3$ *дж/(кг·град)*, а при постоянном давлении $c_p = 5,25 \cdot 10^3$ *дж/(кг·град)*.
Медленно передвигаем поршень по направлению к перегородке (с небольшой остановкой в момент открытия клапана) и осторожно доводим поршень до перегородки. Чему равна произведенная нами работа?

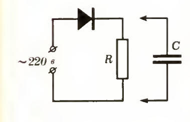


Рис. 3.

Ф430. На рисунке 3 показана простейшая схема выпрямителя. Диод считается идеальным: его сопротивление в прямом направлении равно нулю, в обратном — бесконечно велико. Во сколько раз изменится мощность, выделяемая на сопротив-

лении R, при подсоединении параллельно ему конденсатора C такой емкости, что за период колебаний напряжения сети ($U = 220\,в$, $f = 50\,гц$) заряд конденсатора практически не меняется?

В. Скороваров

Ф431. В дифференциальном вороте, схематически изображенном на рисунке 4, используется цепь, каждый метр которой содержит N звеньев. Шкивы верхнего блока снабжены зубцами, которые продеваются в звенья цепи, причем шкив большего диаметра имеет n зубцов, а шкив меньшего диаметра $n - 1$. Трение в системе таково, что силы, необходимые для подъема или опускания груза, отличаются в k раз. Предполагая, что трение от направления движения не зависит, найти эти силы.

Ф432. В стеклянном шаре имеется воздушный сферический пузырек. Необходимо найти способы измерения диаметра этого пузырька. Шар должен остаться целым. Способы должны быть описаны как можно точнее.

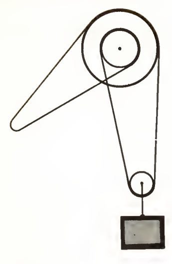


Рис. 4.

Решения задач

М376 — М378; Ф383 — Ф386

М376. *а) В ряд расположено 30 клеток. На самой правой клетке стоит белая фишка, на самой левой — черная. Каждый из двух играющих по очереди передвигает свою фишку на одно поле — вперед или назад. (Пропускать ход нельзя.) Проигравшим считается тот, у кого нет хода. Кто выигрывает: начинающий или его партнер? б) Решите задачу, заменив 30 на N.*

В этой задаче речь идет о «неинтересной» игре, где проигрыш того или другого партнера никак не зависит от их стратегии: все зависит от начального положения фишек.

Будем называть *расстоянием* между двумя фишками число клеток, расположенных между ними. При $N = 30$ в начальной позиции расстояние между фишками — 28. Ясно, что после каждого *полухода* (хода одного из партнеров) это расстояние уменьшается или увеличивается на единицу. Таким образом, при $N = 30$ и вообще при четном N расстояние может стать равным нулю после четного числа полуходов. Поэтому выиграть может только второй — только после его хода фишки могут оказаться рядом. Он действительно выиграет, если будет все время ходить вперед.

По тем же причинам при нечетном N может выиграть только первый (начинающий).

Н. Васильев

◆

М377. *Дан треугольник ABC. Найти на стороне AC такую точку D, чтобы периметр треугольника ABD равнялся длине стороны BC.*

Эта задача — на построение циркулем и линейкой; публикуя ее, мы надеялись получить именно такое, чисто геометрическое решение. Многие же читатели искали точку D, составляя уравнения и проводя довольно громоздкие вычисления.

Предположим, что искомая точка D найдена, т. е. что $P_{\angle ABD} = |BC|$ (см. рис. 1). Тогда если от точки D отложить отрезок DK, равный по длине отрезку BD, то длина отрезка AK будет равна разности длин сторон BC и AB треугольника ABC.

Из этого замечания ясно, как решать задачу. На стороне AC от точки A отложим отрезок AK: $|AK| = |BC| - |AB|$,

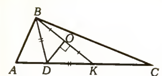


Рис. 1.

и соединим точку K с вершиной B. Из середины O отрезка BK восставим перпендикуляр; точка пересечения этого перпендикуляра со стороной AC и будет искомой точкой ($[OD] \perp [BK]$ и O — середина $[BK]$; следовательно, $|BD| = |DK|$).

Осталось выяснить, всегда ли задача имеет решение. В треугольнике ABD: $|AD| + |BD| > |AB|$, то есть $P_{\triangle ABC} = |AD| + |BD| + |AB| > 2|AB|$. Следовательно, задача имеет решение, если $|BC| > 2|AB|$.

С. Охитин

◆

М378. *Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде*

а) $x^3 + y^3 + z^3$, *где* x, y, z *— целые числа;*

б) $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n$, *где* $x_1, \ldots, x_n$ *— натуральные числа.*

в) Докажите, что любое рациональное число можно представить в виде $x^3 + y^3 + z^3$, *где* x, y, z *— рациональные числа.*

а) Легко проверить, что если x — целое число, то либо x^3, либо $x^3 + 1$, либо $x^3 - 1$ делится на 9. Действительно, если $x = 3k$, то это очевидно; если $x = 3k + 1$, то $x^3 - 1 = (x-1)^3 + 3x(x-1) = (3k)^3 + 9kx$; если же $x = 3k - 1$, то $x^3 + 1 = (x+1)^3 + 3x(x+1) = (3k)^3 + 9kx$. Иначе наше утверждение можно сформулировать так: при делении куба целого числа на 9 в остатке могут получиться только 0, 1 и -1. Отсюда сразу видно, что сумма трех кубов при делении на 9 может дать в остатке только 0, ± 1, ± 2, ± 3. Поэтому все числа вида $9k \pm 4$ в виде суммы трех кубов целых чисел представлены быть не могут.

б) Возьмем все натуральные числа, меньшие числа N^n (где $N > 1$ — какое-то натуральное число). Если $a = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n$ (где x_i — натуральные числа), и $a < N^n$, то $x_i \leqslant N - 1$. Из n чисел $x_1, \ldots, x_n$, каждое из которых может принимать $(N-1)$ значений $(1, 2, \ldots, N-1)$, можно составить $(N-1)^n$ наборов (см., например, «Квант», 1971, № 1, статью Н. Я. Виленкина «Комбинаторика»). Среди сумм, составленных из n-х степеней чисел этих наборов, будут и одинаковые; так что количество чисел a вида $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n$, меньших N^n, не более $(N-1)^n$. Следовательно, $[N^n - (N-1)^n] = A_N$ натуральных чисел, меньших N^n, нельзя представить в виде суммы n-х степеней ровно n натуральных чисел. Число A_N можно сделать как угодно большим, поскольку $A_N > N^{n-1}$ и $n > 1$. Из этого следует, что натуральных чисел, не представимых в виде $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n$, — бесконечно много.

в) Доказательство утверждения, сформулированного в пункте в), впервые было получено в 1825 году. Выглядит оно потрясающе: для рационального числа a непосредственно пишется его представление в виде суммы трех кубов рациональных чисел:

$$a = \left(\frac{a^3 - 3^6}{3^2a^2 + 3^4a + 3^6}\right)^3 + \left(\frac{-a^3 + 3^5a + 3^6}{3^2a^2 + 3^4a + 3^6}\right)^3 + \left(\frac{a^2 + 3^4a}{3^2a^2 + 3^4a + 3^6}\right)^3. \quad (*)$$

Непонятно, правда, как до такой формулы можно «додуматься» (впрочем, может быть, кому-нибудь из наших читателей это и удалось). Мы лишь можем предложить вам проверить, что эта формула верна.

Однако задачей о сумме трех кубов математики занимались не для того, чтобы получить формулу (*); сама по себе она, хоть и выглядит внушительно, мало поучительна. Гораздо важнее было понять, что «скрывается» за этим тождеством. Но это уже совсем специальный вопрос; им занимается один из самых трудных разделов математики — *алгебраическая геометрия*.

И. Глуманов

Ф383. *Цепочка массы m и длины l надета на гладкий круговой конус с углом при вершине 2α. Конус вместе с цепочкой вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью симметрии конуса. Плоскость цепочки горизонтальна. Найти натяжение цепочки.*

Рассмотрим силы, действующие на малый участок цепочки длины Δl. Это сила тяжести $\mathbf{G} = mg\dfrac{\Delta l}{l}$, сила $\mathbf{N}$ нормальной реакции поверхности конуса и силы натяжения цепочки $\mathbf{F}$, действующие на участок Δl со стороны соседних участков (рис. 2). Сумма проекций всех сил на вертикальную ось OY должна быть равна нулю, поскольку цепочка вообще не перемещается в вертикальном направлении:

$$N\sin\alpha - G = 0. \qquad (1)$$

Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось OX обеспечивает центростремительное ускорение элемента цепочки:

$$2F\sin\varphi - N\cos\alpha = \frac{m}{l}\Delta l\omega^2 r. \qquad (2)$$

Здесь $r = \dfrac{l}{2\pi}$ и $\sin\varphi = \dfrac{\Delta l}{2r} = \pi\dfrac{\Delta l}{l}$ (рис. 3). Решая совместно уравнения (1) и (2), получим

$$F = \frac{m}{2\pi}\left(\frac{g}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\omega^2 l}{2\pi}\right).$$

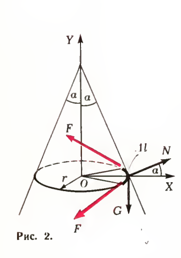


Рис. 2.

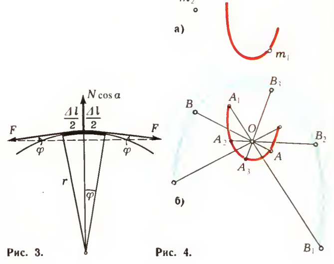


Рис. 3.

Рис. 4.

◆

Ф384. *Две взаимодействующие между собой частицы 1 и 2 с массами m_1 и m_2 соответственно образуют замкнутую систему. На рисунке 4, а показана траектория частицы 1 и положение обеих частиц в момент времени, когда скорость частицы 1 равна $\mathbf{v}$, а скорость частицы 2 равна $-3\mathbf{v}$. Построить траекторию частицы 2, если* $\dfrac{m_1}{m_2} = 3$.

По условию задачи импульс (количество движения) данной системы равен нулю:

$$m_1\mathbf{v} + m_2(-3\mathbf{v}) = 0,$$

поскольку $m_1 = 3m_2$. Равенство нулю импульса замкнутой системы означает, что ее центр масс все время остается неподвижным.

В случае двух частиц центр масс расположен на отрезке, соединяющем частицы, и делит этот отрезок в отношении, обратном отношению масс. Поэтому построение траектории частицы 2 сводится к следующему (рис. 4, *б*). Проводим отрезок AB, соединяющий частицы *1* и *2* в заданный момент времени (когда $\mathbf{v}_{m_2} = -3\mathbf{v}_{m_1}$). Делим этот отрезок на четыре части и откладываем одну часть от частицы *1*. Найденная точка O определяет положение неподвижного центра масс. Далее соединяем произвольную точку траектории частицы *1* (например, точку A_1) с центром масс отрезком A_1O и продолжа-

ем этот отрезок на расстояние $OB_1 = 3A_1O$. Найденная точка B_1 будет соответствующей точкой траектории частицы 2. Проведя такое построение для всех точек траектории частицы 1, получим траекторию частицы 2.

◆

Ф385. *Большая тонкая проводящая пластина площади S и толщины d помещена в однородное электрическое поле* **E**, *перпендикулярное пластине. Какое количество тепла выделится в проводнике, если поле выключить?*

При внесении проводящей пластины в электрическое поле под действием этого поля происходит перераспределение свободных зарядов в пластине. На противоположных сторонах пластины, перпендикулярных направлению внешнего поля, скапливаются заряды противоположных знаков. Внутри пластины напряженность поля равна нулю. Это означает, что свободные заряды, распределенные по поверхности пластины, создают поле, напряженность которого внутри пластины равна $-\mathbf{E}$, а вне пластины равна нулю.

Сразу после исчезновения внешнего поля внутри пластины остается только поле поверхностных зарядов, которое обладает энергией

$$W = \frac{E^2}{2} \varepsilon_0 S d.$$

Под действием этого поля происходит «обратное» перераспределение зарядов по всему объему пластины. При этом вся энергия электрического поля выделится в виде тепла:

$$Q = \frac{E^2}{2} \varepsilon_0 S d.$$

◆

Ф386. *В вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника, катет которого равен a, расположены одинаковые металлические шарики радиусов r ($r \ll a$). Шарики заряжены зарядом q каждый. Шарики 1 и 2 соединяют проводником, затем проводник убирают. Затем так же поступают с шариками 2 и 3 и, наконец, с шариками 3 и 1. Какие заряды установились на шариках?*

Решение задачи зависит от того, какой из шариков находится в вершине прямого угла.

Поэтому удобнее решить сначала две вспомогательные задачи. Первая задача — о распределении суммарного заряда Q двух маленьких шариков, расположенных на концах катета. Шарики соединяют проводником в присутствии такого же шарика с зарядом Q_0, находящегося в третьей вершине равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 5). Пусть после соединения заряды шариков станут Q_1 и Q_2. Соединенные шарики будут иметь один и тот же потенциал, который можно определить согласно принципу суперпозиции как сумму потенциалов, созданных каждым зарядом в отдельности. Условие $r \ll a$ позволяет не заботиться о том, как именно распределены заряды Q_1, Q_2, Q_0 по поверхностям шариков.

Система уравнений

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a\sqrt{2}},$$

$$Q_1 + Q_2 = Q$$

приводит к решению

$$Q_1 = \frac{Q}{2} - \frac{(2-\sqrt{2})r}{4(a-r)} Q_0 = \frac{Q}{2} - kQ_0,$$

$$Q_2 = \frac{Q}{2} + \frac{(2-\sqrt{2})r}{4(a-r)} Q_0 = \frac{Q}{2} + kQ_0,$$

где $k = \frac{(2-\sqrt{2})r}{4(a-r)} \approx \frac{(2-\sqrt{2})r}{4a}$ (так как $r \ll a$).

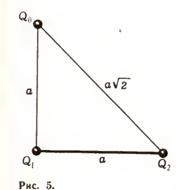


Рис. 5.

Вторая вспомогательная задача — о распределении суммарного заряда Q двух шариков, расположенных на концах гипотенузы. При соединении этих шариков в присутствии такого же шарика с зарядом Q_0, расположенного в вершине

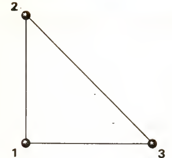


Рис. 6.

Рис. 7.

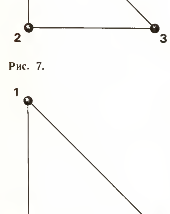


Рис. 8.

прямого угла, в силу симметрии суммарный заряд шариков распределяется между ними поровну:

$$Q_1 = Q_2 = \frac{Q}{2}.$$

Решение двух вспомогательных задач позволяет быстро найти решение трех основных. Рассмотрим, например, случай, когда в вершине прямого угла находится шарик *1* (рис. 6). Тогда до всех соединений

$$q_1 = q,\ q_2 = q,\ q_3 = Q_0 = q.$$

Суммарный заряд шариков *1* и *2* равен $Q = 2q$. Заряд в третьей вершине $Q_0 = q$. Поэтому после соединения шариков *1* и *2* будем иметь:

$$Q_1 = \frac{Q}{2} - kQ_0 = q - kq,\ Q_2 = q + kq,\ q_3 = q.$$

Теперь уберем проводник между шариками *1* и *2* и соединим шарики *2* и *3*. Суммарный заряд шариков *2* и *3* до соединения *2—3* равен

$$Q = (q + kq) + q = 2q + kq.$$

Эти шарики расположены на концах гипотенузы. Следовательно, после соединения *2—3* распределение зарядов будет таким:

$$q_1 = q - kq,\ q_2 = \frac{Q}{2} = q + \frac{k}{2}q;\ q_3 = q + \frac{k}{2}q.$$

Суммарный заряд шариков *3* и *1* после убирания проводника равен

$$Q = \left(q + \frac{k}{2}q\right) + (q - kq) = 2q - \frac{k}{2}q,$$

заряд в последней вершине (*2*) равен $Q_0 = q_2 = q + \frac{k}{2}q$.

Поэтому после соединения *3—1* заряды распределятся так:

$$q_1 = \frac{Q}{2} - kQ_0 = \left(q - \frac{k}{4}q\right) - k\left(q + \frac{k}{2}q\right) = q\left(1 - \frac{5}{4}k - \frac{1}{2}k^2\right),$$

$$q_2 = Q_0 = q\left(1 + \frac{1}{2}k\right),$$

$$q_3 = \frac{Q}{2} + kQ_0 = q\left(1 + \frac{3}{4}k + \frac{1}{2}k^2\right).$$

Подставляя значение $k \approx \frac{(2 - \sqrt{2})\,r}{4a}$ и пренебрегая членами, содержащими величину $\frac{r}{a}$ в степени выше первой, окончательно получим:

$$q_1 \approx q\left(1 - \frac{5(2 - \sqrt{2})\,r}{16a}\right),$$

$$q_2 \approx q\left(1 + \frac{(2 - \sqrt{2})\,r}{8a}\right),$$

$$q_3 \approx q\left(1 + \frac{3(2 - \sqrt{2})\,r}{16a}\right).$$

Результаты для случаев, изображенных на рисунках 7 и 8, сведены в таблицы:

(Рис. 7)	q_1	q_2	q_3
До всех соединений	q	q	q
После соединения 1—2	$q+kq$	$q-kq$	q
После соединения 2—3	$q+kq$	$q-\frac{3}{2}kq-k^2q$	$q+\frac{1}{2}kq+k^2q$
После соединения 3—1	$q\left(1+\frac{3}{4}k+\frac{1}{2}k^2\right)$	$q\left(1-\frac{3}{2}k-k^2\right)$	$q\left(1+\frac{3}{4}k+\frac{1}{2}k^2\right)$
Приближенное значение	$q\left(1+\frac{3(2-\sqrt{2})r}{16a}\right)$	$q\left(1-\frac{3(2-\sqrt{2})r}{8a}\right)$	$q\left(1+\frac{3(2-\sqrt{2})r}{16a}\right)$

(Рис. 8)	q_1	q_2	q_3
До всех соединений	q	q	q
После соединения 1—2	q	q	q
После соединения 2—3	q	$q+kq$	$q-kq$
После соединения 3—1	$q\left(1+\frac{1}{2}k+k^2\right)$	$q(1+k)$	$q\left(1-\frac{3}{2}k-k^2\right)$
Приближенное значение	$q\left(1+\frac{(2-\sqrt{2})r}{8a}\right)$	$q\left(1+\frac{(2-\sqrt{2})r}{4a}\right)$	$q\left(1-\frac{3(2-\sqrt{2})r}{8a}\right)$

Б. Буховцев

А. Земляков, Б. Ивлев

Периодические функции

«Все это было, было, было...»
А. Блок

Эта заметка должна помочь старшеклассникам лучше разобраться в том, что такое периодические функции. Понятие периодичности, весьма важное как в математике, так и в физике, долгое время относилось к числу наиболее трудных в школьном курсе математики. По сути же это понятие не сложно, нужно лишь как следует вникнуть в смысл определения периодичности.

Учебники «Алгебра и начала анализа» для IX и X классов (под ред. А. Н. Колмогорова) в дальнейших ссылках обозначаются просто IX и X.

Напомним, что функция f называется *периодической* функцией, если существует хотя бы одно число $T \neq 0$ такое, что выполнены следующие два условия:

(А) *если* $x \in D(f)$, *то* $x + T \in D(f)$ *и* $x - T \in D(f)$;

(Б) *для любого* $x \in D(f)$ $f(x) = f(x + T) = f(x - T)$;

при этом число T называется *периодом* функции f (ср. IX, п. 69). Менее формально можно сказать так: периодическими называются такие функции, значения которых повторяются через некоторый промежуток T значений аргумента:

$f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = \ldots = f(x - T) = f(x - 2T) = \ldots$

(поясните, как из определения — из условий (А) и (Б) — вывести выписанную цепочку равенств). Очевидно, график периодической функции отображается сам на себя при параллельных переносах $\vec{a} = \vec{r}(T, 0)$ и $-\vec{a} = \vec{r}(-T, 0)$ на расстояние T вдоль оси Ox (см. рис. 1; это свойство графика периодической функции f можно было бы принять за определение периодичности f — объясните).

С периодическими или с «приближенно периодическими» процессами приходится часто встречаться как в природе, так и в технике, и именно поэтому важно изучать периодические функции в математике. Примеры таких процессов — смены дня и ночи или времен года, связанные с приближенно периодическими вращениями Земли около своей оси и около Солнца; приливы и отливы и смена фаз Луны; движение поршня в цилиндре двигателя внутреннего сгорания и т. д.

Примеры периодических функций

1°. В курсе X класса подробно изучаются функции вида $f_\omega(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$, где $A, \omega > 0$, — они связаны с так называемыми *гармоническими колебаниями*. Как известно, функция f_ω периодическая и имеет периоды

$$\pm\frac{2\pi}{\omega},\quad \pm 2\cdot\frac{2\pi}{\omega},\quad \pm 3\cdot\frac{2\pi}{\omega},\ldots$$

т. е. все целые кратные nT_0 ($n \in \mathbf{Z}$) наименьшего положительного периода $T_0 = 2\pi/\omega$ этой функции (рис. 2).

2°. Конечно, любая постоянная функция $f(x) = c$ (при любом $x \in \mathbf{R} = D(f)$) является периодической, причем ее периодами будут любые числа $T \neq 0$ (а наименьшего положительного периода не существует).

3°. Согласно определению, если функция f периодична и $T > 0$ — ее период, то для любой точки $x_0 \in D(f)$ точки $x_0 + T$, $x_0 - T \in D(f)$, далее, точки $x_0 + 2T$ и $x_0 - 2T$ тоже принадлежат $D(f)$, и т. д.; таким

образом, если f определена в точке x_0, то она должна быть определена во всех точках $x_n = x_0 + nT$, где $n \in \mathbf{Z}$ (т. е. $n=0$, ±1, ±2, ...). Значения f во всех этих точках должны быть одинаковы: $f(x_n) = c$ не зависит от n. Если считать, что при всех остальных значениях x (т. е. при $x \neq x_n$) функция f вовсе не определена, то мы получаем по существу простейший пример периодической функции:

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{при } x = x_n = x_0 + nT,\ n \in Z, \\ \text{не определена при остальных } x. \end{cases}$$

График f — бесконечное множество точек вида (x_n, c) на одинаковых расстояниях друг от друга. Периодами f являются целые кратные nT числа T — наименьшего положительного периода (рис. 3).

4°. Укажем совсем общий способ построения периодических функций с данным периодом $T>0$ — точнее, способ построения их графиков. Зададим функцию f на полуинтервале $[0, T)$ произвольно, а затем применим к графику f над этим промежутком (при $0 \leqslant x < T$) всевозможные параллельные переносы вида $n\vec{a} = \vec{r}(nT, 0)$, где n — целые числа (рис. 4, *а*, *б*). Очевидно, при этом получится график периодической функции f с периодом T.

Задача 1. Может ли периодом функции f, построенной описанным выше образом, оказаться число T_0, меньшее T $(0 < T_0 < T)$? Если может, приведите пример.

Наши дальнейшие планы таковы. Во-первых, мы рассмотрим некоторые важные свойства периодических функций. Далее на примерах покажем, как установить периодичность или непериодичность конкретных функций, заданных формулами, и как отыскивать периоды. Наконец, мы сформулируем ряд задач разнообразного характера, касающихся периодических и непериодических функций. (*Непериодическими* — пишется слитно — принято называть функции, не являющиеся периодическими.)

Известные из курса IX класса примеры периодических функций (т. е., по сути, тригонометрические функции) приводят к следующему наблюдению: если у периодической функции f существует ***наименьший положительный*** период, т. е. такой период T_0, что любое число t, большее нуля и меньшее T_0, уже не является периодом f, то все остальные периоды функции f суть целые кратные T_0 — числа вида $T = nT_0$, где

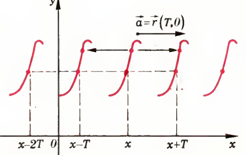


Рис. 1.

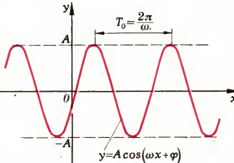


Рис. 2.

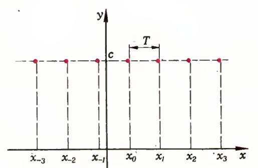


Рис. 3.

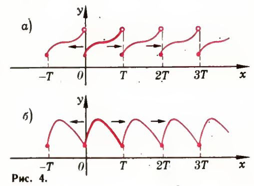


Рис. 4.

n — целое. Это верно для любой периодической функции, у которой существует наименьший положительный период (у периодической функции f может и не существовать такого периода — см. пример 2°, а также задачу 10).

Теорема 1. *Если T_0 — наименьший положительный период периодической функции f, то произвольный период T этой функции f представляется в виде $T = nT_0$, где n — целое. Обратно, любое число T указанного вида является периодом f (при этом удобно считать периодом f также и число $0 = 0 \cdot T_0$).*

Доказательство (ср. IX, с. 186).

Замечание: если числа T_1 и T_2 являются периодами функции f, то и их *сумма* $T_1 + T_2$ и *разность* $T_1 - T_2$ будут периодами f. (Убедитесь в этом самостоятельно.)

Отсюда сразу ясно, что если T_0 — период f, то все целые кратные T_0 — числа $T = nT_0$, $n \in \mathbf{Z}$, — являются периодами f. Пусть теперь T_0 — наименьший положительный период f, а T — произвольный период f. Допустим, что T не представляется в виде $T = nT_0$, где n — целое. Тогда число T заключено строго между какими-то соседними целыми кратными числа T_0 (рис. 5):

$$nT_0 < T < (n+1)\,T_0.$$

Вычитая из всех частей этого неравенства число nT_0, получим: $nT_0 - nT_0 < T - nT_0 < (n+1)T_0 - nT_0$, т. е. $0 < T' = T - nT_0 < T_0$. С одной стороны, поскольку T_0 — наименьший период f, число T', заключенное между 0 и T_0, не может быть периодом функции f; с другой стороны, согласно сделанному выше замечанию, число $T' = T - nT_0$ является периодом f (как разность периодов T и nT_0). Полученное противоречие показывает, что $T = nT_0$, и теорема полностью доказана.

Итак, если у функции f существует наименьший положительный период и нам удалось его найти, то тем самым найдены и все остальные периоды f — это будут целые кратные наименьшего.

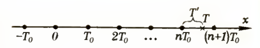


Рис. 5.

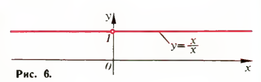


Рис. 6.

$D(f)$

$x_0 - T = -\frac{T}{2}$ $\quad 0 \quad$ $x_0 = \frac{T}{2}$ $\quad x$

Рис. 7.

Важное замечание. В учебнике X на с. 173—174 приведено определение периодической функции, несколько отличное от определения из п. 69 учебника IX. Именно, в учебнике X условие периодичности (Б)

$$f(x) = f(x+T) = f(x-T)$$

заменено на более слабое требование:

($Б_0$) *для любого* $x \in D(f)$ *выполнено* $f(x) = f(x+T)$.

Оказывается, из (А) и ($Б_0$) следует (Б). В самом деле, пусть функция f удовлетворяет условию (А) и условию ($Б_0$). Тогда из (А) следует, что для $x \in D(f)$ число $x_1 = x - T \in D(f)$. Отсюда по свойству ($Б_0$) получаем:

$$f(x_1) = f(x_1 + T),$$

т. е. $f(x - T) = f(x)$.

Вернемся к примерам.

5°. Функция

$$f(x) = \frac{x}{x} = \begin{cases} 1 \text{ при } x \neq 0, \\ \text{не определена при } x = 0 \end{cases}$$

непериодична. Действительно, условие (А) не может быть выполнено ни при каком $T \neq 0$: число $x_0 = T \in D(f)$, а $x_0 - T = 0 \notin D(f)$ (рис. 6).

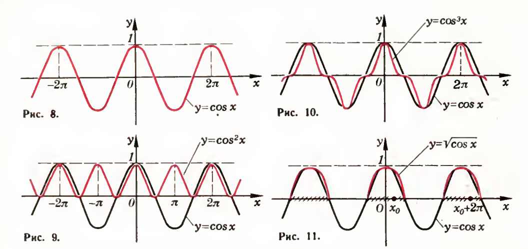


Рис. 8. Рис. 9. Рис. 10. Рис. 11.

6°. Фуикция $f(x) = \cos\sqrt{x}$ также непериодичча — опять не выполнено условие (А):

$$D(f) = \{x \mid x \geqslant 0\},$$

и если $T > 0$, то $x_0 = T/2 \in D(f)$, но $x_0 - T = -T/2 < 0$ и не принадлежит $D(f)$; аиалогично рассматривается случай $T < 0$ (рис. 7).

7°. Квадратнчиая функция $f(x) = x^2$ определеиа всюду: $D(f) = \mathbf{R}$, — и поэтому условие (А) для нее выполиеио при любом T. Если же при иекотором $T \neq 0$ выполнеио н условие ($Б_0$), то прн любом $x \in \mathbf{R}$ должио быть верио соотиошение $x^2 = (x+T)^2$. Взяв $x = 0$, получим: $0^2 = (0+T)^2$, т. е. $T^2 = 0$, или $T = 0$, в протнворечие с условием $T \neq 0$. Следовательно, условие ($Б_0$) ие выполиено ии при каком $T \neq 0$, и фуикция $f(x) = x^2$ — иепериодическая.

8°. Функция $f(x) = \cos x$ (рис. 8), как известио, перноднчна: ее периодом является, например, $T_0 = 2\pi$. Это иаименьший пернод, так как $\cos x = 1$ лишь при $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, т. е. *значение* 1 *функции* f *повторяется через* 2π; поэтому пернода, меньшего 2π, у f ие может быть (в протнвном случае значение 1 функция принимала бы в точках, отстоящих друг от друга меиее, чем иа 2π).

Из теоремы 1 выводнм, что периодамн функции $f(x) = \cos x$ являются целые кратиые 2π и только они. (Обратнте виимание на то, **как** мы доказывали, что период 2π — наименьший. Подобиое рассуждеиие помогает и во многих других случаях.)

9°. *Общее замечание.* Еслн $f(x)$ — периодическая фуикция с периодом T, то, какова бы ии была фуикция F, *сложная функция* $y = F(f(x))$ является пернодической, причем T будет и ее периодом. (Обоснуйте это: ср. с. X, с. 175.) Напрнмер, фуикции $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, $\sqrt{\cos x}$ (см. рисуики 9—11 — на рисуиках 8—11 по техиическим прнчиам на координатиых осях выбраны разные масштабы) — периодические с периодом 2π (здесь $F(z) = z^2, z^3, \sqrt{z}$, соответственно). Независнмо от сформулированного замечаиия, рассмотрим фуикцию $y = \cos^2 x$ и непосредственно проверим для нее условия перноднчиости (А) и ($Б_0$).

10°. Функция $f(x) = \cos^2 x$ (рис. 9) всюду определеиа, поэтому условие (А) выполиено автоматически. Далее, f нмеет 2π своим периодом: так как $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, то $\cos^2(x + 2\pi) = \cos^2 x$, т. е. $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Вопрос: является ли $T_0 = 2\pi$ иаименьшим периодом $f(x) = \cos^2 x$?

Попробуем на него ответнть. Рассмотрнм те x, при которых $f(x) = 1$, т. е. $\cos^2 x = 1$; тогда $\cos x = 1$

или $\cos x = -1$, откуда $x = \pi n$, то есть значение 1 повторяется через π, а не через 2π! Может быть, наименьшим периодом f будет π?

Преобразуем $\cos^2 x$ по известным формулам:

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}.$$

Функция $y = \cos 2x$ периодична с периодом π (поясните); следовательно, и функции $(^1/_2) \cos 2x$ и $(^1/_2) \cos 2x + {^1/_2} = f(x)$ будут иметь период π. Поскольку значение 1 у функции f повторятся через π (см. выше), число π будет наименьшим периодом f.

То же самое можно получить и с помощью формулы приведения: $\cos(x + \pi) = -\cos x$, поэтому $\cos^2(x + \pi) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x$.

11°. *Общее замечание*. Если функция $f(x)$ периодична с периодом T, то любая сложная функция вида

$$F(x) = af(Ax + B) + b$$
$$(A \neq 0,\ B,\ a,\ b \text{ — постоянные})$$

является периодической, причем ее периодом будет число $T' = T/A$. (Обоснуйте это; ср. с X, с. 175.) Например, функция вида $a \cos(Ax + B) + b$ периодична с периодом $2\pi/A$.

Сформулируем теперь ряд задач.

Задача 2. Выясните, какие из указанных ниже функций периодичны, а какие — нет:

а) $\sin|x|$, б) $|\sin x|$, в) $\dfrac{\sin x}{\sin x}$.

Задача 3. Докажите, что следующие функции непериодичны:

а) $\dfrac{1}{x}$, в) $\sin[(\sqrt{x})^2]$, д) $x^2 + \sin x$,

б) $\sin\dfrac{1}{x}$, г) $x^2 + 3x + 17$, е) $\sin\sqrt{|x|}$.

Задача 4. Докажите, что следующие функции периодичны, и найдите их наименьший положительный период:

а) $\sin^2 x$, в) $\sin^5 x$,

б) $\sin^4 x$, г) $\sin\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{x}{3}$,

д) $\sin 2x + \sin 3x$,

е) $\sin\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \sin\sqrt{2}x$.

Очевидно, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ периодичны с одинаковым периодом T, то их сумма $s(x) = f(x) + g(x)$ тоже будет периодической функцией, причем T является ее периодом*).

Задача 5. Функции $f(x)$ и $g(x)$ всюду определены и имеют одинаковый наименьший положительный период T_0. Верно ли, что T_0 является наименьшим и для суммы $f(x) + g(x)$? Придумайте две такие (всюду определенные) функции f и g, период суммы которых был бы ровно в 2 раза меньше T_0.

Пусть периодические функции f и g имеют наименьшие положительные периоды T_1 и T_2, соответственно, и $T_1 \neq T_2$.

Вопрос. В каком случае у функций f и g существует общий (конечно, уже не наименьший) период T?

Ответ. Если у f и g есть общий период T, то по теореме 1 $T = mT_1 = nT_2$, где m и n — целые; отсюда следует, что $T_2/T_1 = m/n$ — рациональное число. Обратно, если отношение T_2/T_1 рационально, $T_2/T_1 = m/n$, то $mT_1 = nT_2 = T$ — общий период функций f и g.

Все наши рассуждения показывают справедливость такого утверждения.

Теорема 2. *Если наименьшие положительные периоды периодических функций f и g соизмеримы, то есть отношение T_2/T_1 рационально, то и сумма этих функций $f(x) + g(x)$ периодична.*

Оказывается, что если отношение наименьших периодов всюду определенных и непрерывных функций f и g иррационально, то функция $f + g$ будет непериодической. То же самое можно сказать и о произведении периодических функций (мы ограничимся лишь тем, что приведем несколько соответствующих примеров; общее же доказательство сформулированного утверждения довольно сложно).

Задача 6. Докажите, что следующие функции (произведения и суммы периодических!) не являются периодическими:

а) $\cos x \cdot \cos\sqrt{2}\,x$, в) $\sin x \cdot \sin\sqrt{2}\,x$,

б) $\cos x + \cos\sqrt{2}\,x$, г) $\sin x + \sin\sqrt{2}\,x$.

---

*) Здесь есть небольшая тонкость: область определения суммы $f(x) + g(x)$ — это пересечение $D = D(f) \cap D(g)$, и может случиться так, что $D = \varnothing$. *Нигде не определенную функцию* удобно считать периодической, причем ее периодом следует считать любое число.

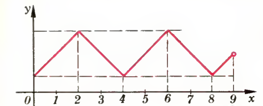


Рис. 12.

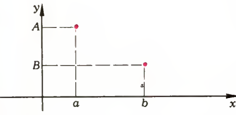


Рис. 13.

З а м е ч а н и е. Функции из задачи 6 относятся к очень важному, особенно в физических приложениях, классу *почти-периодических* функций. Такие функции f удовлетворяют следующему условию: для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ существует «почти-период» — число $T \neq 0$ такое, что при произвольном x значение $f(x+T)$ равно $f(x)$ с точностью до ε, то есть $|f(x+T) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Грубо говоря, это объясняется тем, что иррациональные числа с любой точностью можно приблизить рациональными; заметим, что чем меньше ε, тем больше будет «почти-период» T.

В физике величины измеряются приближенно, поэтому об их иррациональности говорить не приходится. С почти-периодическими процессами в природе сталкиваются тогда, когда рассматривают периодические явления, отношение периодов которых не целое, а дробь с большим знаменателем.

П р и м е р. При составлении календаря одновременно нужно учесть обращение Земли вокруг Солнца (с периодом в 1 астрономический год) и вращение Земли около собственной оси (с периодом 1 сутки). Из соображений удобства календарь должен быть периодическим, причем желательно, чтобы его период был общим периодом того и другого вращения. Отношение астрономического года к суткам приближенно равно $m = 365{,}242199$. Если считать это значение точным, то общий период рассматриваемых процессов чересчур велик — 1 миллион лет! Поэтому еще Юлий Цезарь ввел «почти-период» в 4 года, что соответствует значению $m \approx 365{,}25 = 365\,^1/_4$, а римский папа Григорий XIII в 1582 году узаконил «почти-период» календаря в 400 лет, принятый и в настоящее время. Он соответствует приближению $m = 365{,}2425 = 365^{97}/_{400}$. Подробнее обо всем этом написано в статье Н. М. Б е с к и н а «Цепные дроби», «Квант», 1970, № 1.

Вернемся к периодическим функциям.

З а д а ч а 7. Может ли:

а) сумма двух всюду определенных непериодических функций быть периодической функцией?

б) сумма двух всюду определенных непериодической и периодической функций быть периодической функцией?

[К пункту а): придумайте две всюду определенные непериодические функции такие, что их сумма является периодической с наименьшим положительным периодом 2π.]

З а д а ч а 8. Функция f задана на полуинтервале $[0, 9[$ своим графиком, как показано на рисунке 12. Доопределите функцию f при всех остальных $x \in \mathbf{R}$ так, чтобы получилась периодическая функция с наименьшим положительным периодом: а) 4, б) 9, в) 10, г) 4π.

З а д а ч а 9. Функция f задана в двух точках: $f(a) = A$, $f(b) = B$, причем $A \neq B$ (рис. 13). Доопределите функцию до периодической (не обязательно всюду определенной!). Какие наименьшие положительные периоды могут быть у такой (доопределенной) функции?

З а д а ч а 10. Существует ли периодическая функция, у которой:

а) все иррациональные числа являются периодами, а все рациональные не являются?

б) напротив, все рациональные числа являются периодами, а все иррациональные — нет?



Н. Гольдфарб

Элементы статики

В статике изучается равновесие твердых тел, находящихся под действием сил. Под равновесием тела следует понимать состояние, при котором тело не получает ускорений, то есть движется равномерно и прямолинейно или, в частности, находится в состоянии покоя в инерциальной системе отсчета. (В практических задачах систему, связанную с Землей, считают инерциальной.)

Какие силы действуют на тело, находящееся в равновесии? Прежде всего надо назвать силу тяжести. Сила тяжести, действующая на данное твердое тело, представляет собой равнодействующую сил тяжести, действующих на его частицы. Линия действия силы тяжести проходит через центр масс тела — центр тяжести.

Далее, на тело действуют реакции связей — силы, препятствующие перемещению тела в каком-нибудь направлении. Направление действия реакции связей противоположно тому направлению, в котором связь препятствует перемещению данного тела. Реакции связей — это силы упругости и силы трения. Особенность их в том, что абсолютное значение их, а иногда и направление, наперед не известны и зависят от формы тел, состояния поверхностей, а также от других сил, действующих на тело.

Правильное определение направления сил реакции играет при решении задач статики очень важную роль.

Поэтому рассмотрим, как направлены реакции некоторых видов связей.

1. Тело опирается на гладкую поверхность или опору. Трение отсутствует. Когда соприкосновение тела с опорой происходит в одной точке, сила реакции поверхности приложена в точке касания тел и направлена либо по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания (рис. 1, *а*), либо по нормали к поверхности тела или к поверхности опоры (рис. 1, *б*). Такую реакцию называют нормальной.

2. Связь осуществляется гибкой нитью. Сила реакции нити всегда направлена вдоль нити от той точки, в которой нить прикрепляется к телу (рис. 1, *в*).

3. Шарнирная связь — цилиндрический шарнир, в котором ось шарнира перпендикулярна плоскости действия сил (рис. 1, *г*). Реакция такого шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной к его оси (в плоскости рисунка).

Рассмотренные виды связи являются идеальными, или связями без трения.

4. При наличии трения между телом и поверхностью связь, кроме нормальной реакции, дает еще дополнительную реакцию — силу трения $F_{тр}$. Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную возможному перемещению тела по поверхности. Если тело, на которое действуют силы, покоится, то сила трения покоя всякий раз имеет то значение, которое необходимо для предотвращения скольжения. Максимальная величина силы трения покоя определяется, как известно, из условия

$$F_{тр.\,max} = \mu N,$$

где μ —коэффициент трения, а N— сила нормальной реакции поверхности. Таким образом, в зависимости от других сил, действующих на тело, сила трения покоя может принимать все значения от нуля до $F_{тр.\ max}$. При этом полная сила $\mathbf{R} = \mathbf{F}_{тр} + \mathbf{N}$ реакции поверхности (рис. 1, *д*) будет меняться от значения N до некоторого максимального значения R_{max}, определяемого условием $\mathbf{R}_{max} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр\ max}$. Угол φ, который составляет сила **R** с нормалью к поверхности, будет изменяться от нуля до некоторого предельного значения φ_0, задаваемого условием

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{F_{тр.\ max}}{N} = \mu$$

(этот угол называют углом трения).

В статике твердого тела рассматриваются две основные задачи:

1. Определение условий, при которых тело под действием сил может находиться в равновесии.

2. Нахождение действующих на тело сил (в большинстве случаев — реакций связей), когда тело заведомо находится в равновесии.

Мы ограничимся рассмотрением только таких систем, в которых все действующие на тело силы лежат в одной плоскости, — так называемых плоских систем сил.

Любое движение твердого тела можно представить как наложение двух видов движения — поступательного и вращательного (вокруг некоторой оси). Тело будет оставаться в состоянии покоя, если не будет причин, приводящих к возникновению поступательного движения или вращения.

При поступательном движении тела можно рассматривать движение одной точки тела — его центра масс.

Если сумма сил, приложенных к телу, равна нулю, то центр масс будет сохранять свою скорость неизменной и, в частности, будет покоиться, если он был в покое. Но

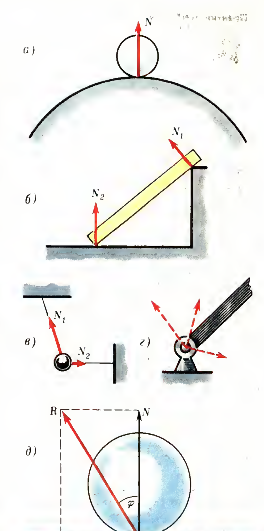




Рис. 1.

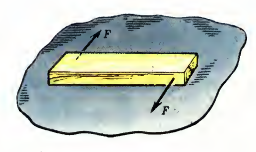


Рис. 2.

это еще не означает, что тело будет находиться в равновесии.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1

К бруску, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, в двух его точках приложены две силы, равные по абсолютной величине и направленные в противоположные стороны (рис. 2). (Такая система сил называется парой сил.) Относительно какой точки будет поворачиваться брусок?

Р е ш е н и е. Опыт подсказывает, что брусок будет поворачиваться. Но так как сумма сил, действующих на тело, равна нулю, то центр масс его будет оставаться в покое, а пара сил вызовет вращение бруска вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной к плоскости, в которой лежат силы.

В общем случае, когда сумма сил, приложенных к телу, равна нулю ($\Sigma \mathbf{F}_i = 0$), а линии, вдоль которых действуют силы, не пересекаются в одной точке, центр масс сохраняет состояние движения неизменным, в частности, покоится, но само тело будет поворачиваться вокруг оси, проходящей через центр масс.

Для характеристики вращательного действия силы в статике вводится новое понятие — момент силы.

Рассмотрим твердое тело, способное вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O (рис. 3). Допустим, что к телу приложены силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$, линии действия которых лежат в вертикальной плоскости. Опыт показывает, что вращательное действие каждой из этих сил зависит не только от величины силы, но и от расстояния от оси до линии действия силы. Это расстояние называют плечом силы.

Моментом силы относительно оси называется алгебраическая величи-

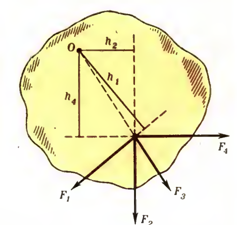


Рис. 3.

на, равная произведению абсолютной величины силы на расстояние от оси вращения до линии действия силы.

В случае плоской системы сил можно вместо момента силы относительно оси, перпендикулярной к плоскости действия сил, говорить о моменте силы относительно точки, имея в виду точку пересечения этой оси с плоскостью.

Внешние силы, например $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_4$ на рисунке 3, могут вращать тело вокруг оси O в противоположные стороны, поэтому моменту силы приписывают знак «+» или «—». Условно принято моменты сил, стремящиеся повернуть тело против часовой стрелки, брать со знаком «+», а по часовой — со знаком «—» (в соответствии с правилом отсчета углов).

Момент пары сил равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил на расстояние между линиями действия сил (плечо).

Докажите, что момент пары сил равен сумме моментов сил пары относительно любой точки плоскости.

Пару сил, не изменяя ее вращательного действия на данное твердое тело, можно переносить и произвольно поворачивать в плоскости действия сил.

Введя момент силы, можно сформулировать общие условия равновесия для плоской системы сил.

Для равновесия тела необходимо и достаточно, чтобы были одновременно равны нулю векторная сумма приложенных к телу сил и алгебраическая сумма моментов этих сил относительно любой точки O плоскости:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0, \qquad (*)$$

$$\sum_i M_O(F_i) = 0. \qquad (**)$$

При выполнении первого условия ускорение центра масс тела равно нулю; при выполнении второго условия угловая скорость вращения всех точек тела остается неизменной и, в частности, если тело покоилось, угловая скорость его точек остается равной нулю *).

Векторное равенство (*) может быть представлено в виде двух скалярных:

$$\sum_i F_{ix} = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} = 0,$$

где F_{ix} и F_{iy} соответственно проекции силы F_i на оси координат X и Y, лежащие в плоскости действия сил.

При решении задач для получения уравнений в наиболее простой форме рекомендуется одну из координатных осей проводить перпендикулярно возможно большему числу неизвестных сил, а моменты сил находить относительно точки, в которой пересекается возможно большее число неизвестных сил.

Если действующие на тело силы, расположенные в плоскости, взаимно параллельны, то число уравнений равновесия сократится до двух. Действительно, если направить одну из осей координат, например ось X, перпендикулярно линиям действия сил, то проекция каждой из сил на эту ось будет равна нулю, и тело будет

*) Момент силы в случае вращательного движения является аналогом силы в случае поступательного движения. При поступательном движении ускорение центра масс пропорционально приложенной силе, при вращательном движении изменение угловой скорости в единицу времени — угловое ускорение — пропорционально моменту силы.



Рис. 4.

находиться в равновесии, если

$$\sum_i F_{iy} = 0, \qquad \sum_i M_O(F_i) = 0$$

(ось Y параллельна силам). Можно еще и по-другому записать условие равновесия тела, на которое действуют параллельные силы:

$$\sum_i M_A(F_i) = 0, \ \sum_i M_B(F_i) = 0,$$

при этом точки A и B не должны лежать на прямой, параллельной силам.

Для тела, способного вращаться вокруг закрепленной оси, единственным условием равновесия будет равенство нулю алгебраической суммы моментов приложенных к нему сил относительно этой оси. Это правило называется правилом моментов.

Задача 2

На невесомом стержне, разделенном на 10 равных частей, нанизаны десять шариков, массы которых равны последовательно 1, 2, 3, ... , 9, 10 *г* так, что их центры совпадают с точками делений (рис. 4). Определить, в каком месте должен опираться стержень на опору, чтобы находиться в равновесии.

Р е ш е н и е. Для выполнения условия (*) равновесия стержня необходимо, чтобы в точке опоры на стержень действовала сила реакции опоры, направленная вверх и равная по абсолютной величине

$$R = \Sigma F_i = \Sigma m_i g = 55 \ g \ (дин).$$

Чтобы выполнялось условие (**) равновесия, точка опоры должна находиться на таком расстоянии x от точки O стержня, чтобы $\Sigma(m_i g \cdot x_i) - Rx = 0$, где x_i — расстояние от точки O до шарика с массой m_i:

$$a \cdot m_1 g + 2\ a \cdot m_2 g + \\ + \ldots + 10a \cdot m_{10} g = Rx.$$

Из этих равенств находим

$$x = \frac{385\,ag}{55\,g} = 7\,a,$$

то есть точка опоры совпадает с центром шарика массы m_7.

Рассмотренная задача по существу есть задача на определение центра тяжести для случая линейного расположения точечных масс.

Докажите, что положение центра тяжести системы, состоящей из n материальных точек, массы которых m_1, m_2, ..., m_n, лежащих на одной прямой и имеющих координаты соответственно x_1, x_2, x_3, . . . , x_n, определяется координатой

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M},$$

где $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ **— масса всей системы.**

Для тел, размеры которых очень малы по сравнению с радиусом Земли, силы тяжести, действующие на отдельные частицы тела, можно считать параллельными друг другу и сохраняющими для каждой из частиц постоянную величину при любых поворотах тела. Равнодействующая всех элементарных сил тяжести есть сила тяжести, действующая на все тело. Абсолютная величина ее равна

$$Mg = \Sigma m_i g,$$

и приложена эта сила к центру масс, так как любое тело, падающее свободно (под действием только силы тяжести), движется поступательно. Поэтому центр масс называют центром тяжести тела.

Итак, центром тяжести твердого тела называется точка, в которой приложена равнодействующая сил тяжести, действующих на частицы данного тела.

Нужно отметить, что центр тяжести может лежать и вне пределов данного тела (например, для кольца, согнутого тонкого стержня и т. п.).

Найти центр тяжести однородного тела часто помогают соображения симметрии. Если тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести лежит соответственно в плоскости, на оси или в центре симметрии. Так, центр тяжести однородного круглого кольца, круглого диска, тонкого стержня, прямоугольной пластины, шара находится в их центре симметрии.

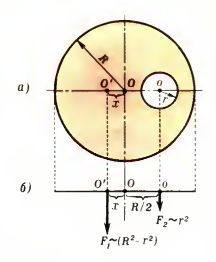


Рис. 5.

Задача 3

Найти центр тяжести круглой однородной пластины радиуса R с круглым вырезом радиуса r, центр которого находится на середине радиуса R (рис. 5).

Решение. В силу симметрии центр тяжести пластины лежит на линии, проходящей через центры большого (O) и маленького (o) кругов. Пусть он находится в точке O' на расстоянии x от центра большого круга (см. рис. 5, a). «Дополним» фигуру до сплошного однородного круга. Центр тяжести при этом переместится в точку O. Следовательно, сумма моментов сил тяжести первоначальной фигуры и сплошного круга радиуса r относительно точки O равна нулю (см. рис. 5, $б$):

$$\rho\, g\, \pi\, (R^2 - r^2)\, x = \rho\, g\, \pi\, r^2 \frac{R}{2}$$

(ρ — плотность материала пластины).

Отсюда

$$x = \frac{r^2 R}{2(R^2 - r^2)}$$

— центр тяжести пластины — находится слева от точки O на расстоянии $\frac{r^2 R}{2(R^2 - r^2)}$ от нее.

Приступая к разбору следующих задач, укажем некоторые дополнительные легко доказуемые положения, которыми мы будем пользоваться.

Силу, приложенную к твердому телу, можно переносить по линии ее действия, при этом не изменяется ее момент относительно точки или оси.

Если на тело действует система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, то мы можем перенести силы вдоль линий их действия в точку пересечения и сложить их, пользуясь правилом параллелограмма. Если равнодействующая сила будет равна нулю и начальная скорость тела также равна нулю, то тело будет находиться в покое.

Если на тело действуют три непараллельные силы, лежащие в одной плоскости, и под действием этих сил тело находится в равновесии, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке (это положение носит название теоремы о трех силах).

Задача 4

Груз массы m подвешен с помощью двух нитей так, что одна нить образует с вертикалью угол α, а другая проходит горизонтально (рис. 6). Найти силы натяжения нитей.

Решение. На тело действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$ и силы $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ натяжения нитей. Спроектируем эти силы на оси координат X и Y и запишем условия равновесия (см. рис. 6):

по оси X —

$$T_2 - T_1 \sin\alpha = 0$$

по оси Y —

$$T_1 \cos\alpha - mg = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$T_1 = \frac{mg}{\cos\alpha}, \quad T_2 = mg \operatorname{tg}\alpha.$$

Задача 5

Груз массы m перемещают с постоянной скоростью по горизонтальной плоскости с помощью троса. Коэффициент трения о плоскость равен μ.

а) Найти силу T натяжения троса, если он направлен под углом α к горизонту (рис. 7).

б) При каком угле α сила натяжения троса будет наименьшей? Чему она будет равна?

Груз считать материальной точкой.

Решение. а) На груз действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила $\mathbf{N}$ нормальной реакции плоскости, сила натяжения троса $\mathbf{T}$, максимальная сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр.max}}$ (так как имеет место скольжение). Запишем условия равновесия груза (см. рис. 7):

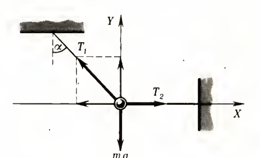


Рис. 6.

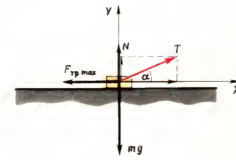


Рис. 7.

по оси X —

$$T\cos\alpha - F_{\text{тр max}} = 0, \qquad (1)$$

по оси Y —

$$T\sin\alpha + N - mg = 0. \qquad (2)$$

Из (2) находим $N = mg - T\sin\alpha$. Тогда $F_{\text{тр max}} = \mu N = \mu(mg - T\sin\alpha)$. Подставив это значение в (1), найдем

$$T = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}. \qquad (3)$$

Примечание. При решении этой задачи абитуриенты допускают ошибку, считая $F_{\text{тр}} = \mu mg$.

б) Из (3) следует, что сила T будет минимальной, когда величина знаменателя $(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)$ максимальна. Обозначив μ через $\operatorname{tg}\varphi$, можно знаменатель преобразовать так:

$$\cos\alpha + \operatorname{tg}\varphi\sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{\cos\varphi}(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi) =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\cos(\alpha - \varphi).$$

Это выражение максимально при $\alpha - \varphi = 0$, откуда $\alpha = \varphi = \operatorname{arctg}\mu$.

Учитывая, что $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ и $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$, подставив найденное значение $\operatorname{tg}\alpha$ в (3), получим

$$T_{\min} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Задача 6

Лестница опирается на вертикальную стену и горизонтальный пол (рис. 8). Центр тяжести лестницы находится на середине ее длины. Коэффициенты трения в точках A и B соответственно равны $\mu_1 = 0{,}5$, $\mu_2 = 0{,}4$. Определить наименьший угол наклона лестницы к горизонту, при котором она может оставаться в равновесии.

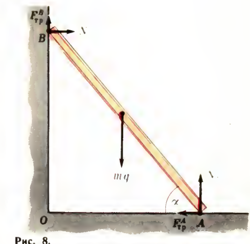


Рис. 8.

Решение. Силы, действующие на лестницу, изображены на рисунке 8. Это — сила тяжести mg и силы реакции со стороны пола и стены, равные соответственно

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{N}_A + \mathbf{F}^A_{\text{тр}}, \quad \mathbf{R}_B = \mathbf{N}_B + \mathbf{F}^B_{\text{тр}}.$$

Под действием этих сил лестница находится в состоянии равновесия.

Обозначим длину лестницы через $2l$. Приравнивая нулю суммы проекций всех сил на оси X и Y и сумму моментов сил относительно точки A, получим следующие три уравнения:

$$N_B - F^A_{\text{тр}} = 0, \qquad (1)$$

$$N_A + F^B_{\text{тр}} - mg = 0, \qquad (2)$$

$$mgl\cos\alpha - N_B \cdot 2l\sin\alpha - F^B_{\text{тр}} \cdot 2l\cos\alpha = 0. \qquad (3)$$

Так как угол α — наименьший угол наклона лестницы, при котором лестница находится на границе между покоем и скольжением, то силы трения будут максимальными, и это дает еще два уравнения:

$$F^A_{\text{тр}} = \mu_1 N_A, \qquad (4)$$

$$F^B_{\text{тр}} = \mu_2 N_B. \qquad (5)$$

Решая уравнения (1)—(5) совместно, получаем для $\alpha_{\min}$:

$$\alpha_{\min} = \operatorname{arctg}\frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1} = 38{,}6^\circ.$$

Эту же задачу можно решить другим способом — графическим. Снача-

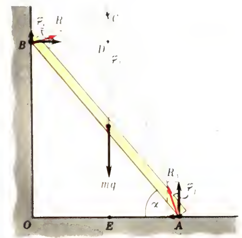


Рис. 9.

ла построим линии действия полных сил реакций $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_B$ в точках A и B (рис. 9). Для этого отложим от нормали к полу в точке A угол

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{F_{\text{тр}}^A}{N_A} = \operatorname{arctg}\mu_1 \text{ (угол трения)}$$

в направлении против часовой стрелки (направление возможного вращения под действием силы R_A). Такой угол составляет с нормалью к полу в точке A линия действия силы R_A. Аналогичным образом получим линию действия силы R_B.

Так как лестница находится в равновесии под действием трех сил: $m\mathbf{g}$, $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{R}_B$, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке (точка C). Точку пересечения линий действия сил $m\mathbf{g}$ и $\mathbf{N}_B$ обозначим D. Рассмотрим треугольник BDC. Из этого треугольника имеем

$$\frac{CD}{BD} = \operatorname{tg}\varphi_2 = \mu_2. \qquad (6)$$

Но $BD = l\cos\alpha$, $CD = CE - DE = CE - BO$. Из треугольника CEA находим

$$CE = EA\operatorname{ctg}\varphi_1 = l\cos\alpha\operatorname{ctg}\varphi_1 = \frac{1}{\mu_1}\, l\cos\alpha.$$

Из треугольника BOA

$$BO = 2l\sin\alpha.$$

Следовательно, $CD = \frac{1}{\mu_1} l\cos\alpha - 2l\sin\alpha$. Подставив значения CD и BD в (6), получим

$$\frac{\frac{1}{\mu_1} l\cos\alpha - 2l\sin\alpha}{l\cos\alpha} = \mu_2,$$

или

$$\frac{1}{\mu_1} - 2\operatorname{tg}\alpha = \mu_2.$$

Отсюда

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1}.$$

В заключение предлагаем вам самостоятельно решить несколько задач.

Упражнения

1. Докажите, что центр тяжести однородного треугольника лежит в точке пересечения его медиан. (Примечание. Доказательством геометрической теоремы о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, может являться утверждение, что для всякого тела центр тяжести — это однозначно определенная точка.)

2. Однородная цилиндрическая труба массы m и радиуса r подвешена горизонтально на тросе, охватывающем трубу «поперек» (рис. 10). Длина хорды AB, соединяющей крайние точки дуги, по которой трос соприкасается с трубой, равна b. Определить силу T натяжения троса.

3. Однородный цилиндр A массы m и радиуса r опирается на гладкую поверхность цилиндра B радиуса R и удерживается в равновесии при помощи нити CD длины l, закрепленной в верхней точке цилиндра B (рис. 11). Определить силу натяжения нити и силу реакции цилиндрической поверхности.

4. Определить наименьшую величину силы, которую надо приложить в горизонтальном направлении к верхней грани кубического ящика массы m для кантования его по горизонтальной поверхности. Чему равна сила давления на упор A (рис. 12) в начале кантования?

5. На наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α, находится тело массы m. Определить наименьшую силу $F_{\min}$, которую надо приложить к телу, чтобы сдвинуть его вверх, и угол β, который должна составлять эта сила с плоскостью, если коэффициент трения равен μ. Какова будет при этом сила давления $F_{\text{давл}}$ тела на плоскость?

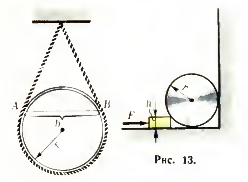


Рис. 10.

Рис. 13.

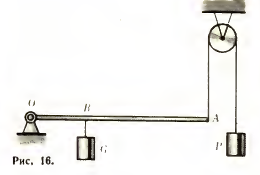


Рис. 16.

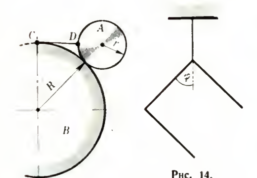


Рис. 11.

Рис. 14.

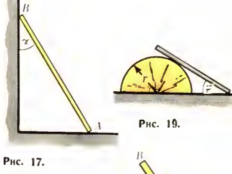


Рис. 17.

Рис. 19.

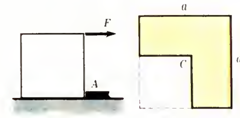


Рис. 12.

Рис. 15.

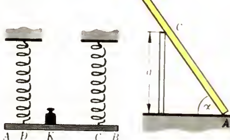


Рис. 18.

Рис. 20.

6. Гладкий шар радиуса r и массы m покоится на горизонтальном полу, касаясь вертикальной стены. С какой силой F следует прижать к нему брусок высоты h (рис. 13), чтобы шар приподнялся над полом?

7. Проволочную квадратную рамку, от которой отрезана одна сторона, подвесили так, как показано на рисунке 14. Определить угол φ.

8. От однородной квадратной пластины со стороной a отрезают квадратный кусок так, как показано на рисунке 15. Какой должна быть длина a_1 стороны отрезаемого квадрата, чтобы центр тяжести оставшейся пластины находился в точке C?

9. Однородный стержень OA закреплен шарнирно в точке O. В точке B на расстоянии b от точки O к стержню подвешен груз G массы m. Стержень удерживается в равновесии в горизонтальном положении с помощью груза P, прикрепленного к нему с помощью нити, перекинутой через блок (рис. 16). При какой длине стержня масса груза P может быть минимальна? Линейная плотность стержня равна γ. Блок считать идеальным.

10. Однородная балка длины l и массы m опирается на гладкую вертикальную стену и шероховатый горизонтальный пол. Коэффициент трения о пол равен μ. Определить, при каком угле α с вертикалью балка находится в равновесии. Найти давление на опоры в точках A и B при максимальном угле α (рис. 17).

11. Балка AB длины $l=2$ *м* и массы $m=40$ *кг* подвешена на двух пружинах. Пружины в свободном состоянии имеют одинаковые длины, коэффициент упругости левой пружины в два раза больше, чем правой. Определить массу груза, который надо положить на балку в точке K (рис. 18), чтобы балка заняла горизонтальное положение, если $AD=BC=30$ *см* и $DK=20$ *см*.

12. Однородный стержень длины $2l$ опирается на горизонтальную плоскость и неподвижный полуцилиндр радиуса r (рис. 19). Коэффициент трения стержня о цилиндр и о плоскость равен μ. Каково наибольшее значение угла φ, при котором стержень находится в равновесии?

13. Труба AB длины l опирается концом A на горизонтальную плоскость, а в точке C — на гладкую вертикальную опору высотой $a=l/2$ (рис. 20). Найти наименьшую величину коэффициента трения между трубой и плоскостью, при котором возможно равновесие, если угол наклона трубы к горизонту $\alpha=60°$.

Физики шутят

Как измерить высоту?

Ниже описывается несколько (восемь) способов решения следующей важной как в теоретическом, так и прикладном отношении задачи: «Как определить высоту многоэтажного здания при помощи достаточно длинной веревки и ртутного барометра с высотой корпуса один метр».
Описанные методы могут быть применены при решении широкого класса аналогичных задач (измерение высоты Эйфелевой башни, телевышки в Останкине, Джомолунгмы и т. п.).



Первый способ (тривиальный). Подняться с барометром на крышу здания, привязать к барометру веревку, опустить барометр до мостовой, а затем поднять его. Измерить длину понадобившейся для этого веревки.

Второй способ (прямой). Держа барометр вертикально, подниматься по лестнице и отмечать длину прибора на стене. Подсчитав количество отметок, получить высоту здания.

Примечание. Если указанным способом измерить высоту одного этажа и полученную величину умножить на число этажей, то будет допущена слишком большая погрешность.

Третий способ (аэростатический). Измерить атмосферное давление у подножия и на уровне крыши здания. По изменению показаний барометра определить высоту здания.



Четвертый способ (геометрический). Вынести барометр в солнечный день на улицу. Установить его вертикально. Измерить длину его тени и длину тени здания. Из подобия треугольников вычислить искомую высоту здания.

Пятый способ (социологический). Опросить всех жильцов дома и усреднить названные ими значения высоты. В качестве приза предложить барометр.

Шестой способ (кинематический). Зная число ударов своего пульса в минуту, измерить число его ударов за время падения вертикально ориентированного барометра с крыши здания. По формуле $h=gt^2/2$ вычислить высоту здания.

Седьмой способ (официально - бюрократический). Обратиться к инженеру ЖЭКа, в ведении которого находится данное здание. По документам узнать высоту здания. (Барометр отсутствует, так как был разбит в предыдущем «кинематическом» опыте.)

Восьмой способ (педагогический)... Может быть, наши читатели предложат свой способ и пришлют его описание в редакцию журнала?

М. Тульчинский

С. Белый

Прямоугольный треугольник

На вступительных экзаменах по математике довольно часто предлагаются задачи, связанные с прямоугольными треугольниками. Что же нужно знать о прямоугольном треугольнике, кроме теоремы Пифагора, чтобы успешно решать такие задачи? Об этом и пойдет речь в настоящей статье.

Утверждение 1. *Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой гипотенузы.*

Отсюда вытекает следующее соотношение:

$$m = R = \frac{c}{2},$$

где m — длина медианы, проведенной к гипотенузе, R — радиус описанной окружности, c — гипотенуза (см. рис. 1 — он поможет вам доказать это утверждение).

Это соотношение часто используется при решении задач.

Пример 1 (МГУ, химфак, 1974). *В прямоугольном треугольнике ABC с катетами 3 и 4 (см) вершина C прямого угла соединена с серединой D гипотенузы AB. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD.*

В силу утверждения 1 точка D — центр описанной окружности, поэтому $|DA| = |DC| = |DB|$. Следовательно, треугольники ACD и BCD — равнобедренные (см. рис. 2). Центры окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, лежат на биссектрисах углов ADC и BDC. Но биссектрисы в равнобедренных треугольниках являются и высотами, поэтому $ECFD$ — прямоугольник, а O_1DO_2 — прямоугольный треугольник. Следовательно, чтобы определить $|O_1O_2|$, достаточно найти $|O_1D|$ и $|O_2D|$. Сделаем это с помощью свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника: если $|AC| = 3$, $|BC| = 4$, то $|AB| = 5$ (по теореме Пифагора), $|CE| = 1{,}5$, $|CD| = 2{,}5$, $|DE| = 2$, $|EO_1| : |O_1D| = |CE| : |CD| = 1{,}5 : 2{,}5$, откуда $|EO_1| = 0{,}75$, $|O_1D| = 5/4$; аналогично $|O_2D| = 5/6$ и, наконец,

$$|O_1O_2| = \sqrt{|O_1D|^2 + |O_2D|^2} = 5\sqrt{13}/12\ (см).$$

Пример 2 (ЛГУ, 1970). *Внутри прямоугольного треугольника ABC ($\hat{C} = 90°$) взята точка O так, что треугольники OAB, OBC и OAC равновелики. Найти $|OC|$, если известно, что $|OA|^2 + |OB|^2 = a^2$ ($a > 0$).*

По условию задачи треугольники OAB, OBC и OAC равновелики. Это сразу же наводит на мысль, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC, так как обратное утверждение хорошо известно. Этот факт, действительно, нетрудно доказать (от противного) для любого треугольника. Дальнейшие вычисления очевидны (см. рис. 3):

$$|OA| = \frac{2}{3}|AA'| = \frac{2}{3}\sqrt{|AC|^2 + \frac{|BC|^2}{4}},$$

$$|OB| = \frac{2}{3}|BB'| = \frac{2}{3}\sqrt{|BC|^2 + \frac{|AC|^2}{4}},$$

$$|OC| = \frac{2}{3}|CC'| = \frac{2}{3}\cdot\frac{|AB|}{2} = \frac{|AB|}{3},$$

$$|OA|^2 + |OB|^2 = \frac{4}{9}\cdot\frac{5|AB|^2}{4} = 5|OC|^2,$$

$$|OC| = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

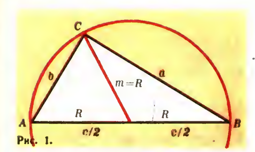


Рис. 1.

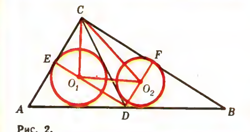


Рис. 2.

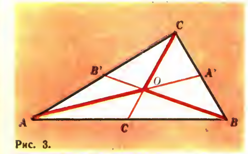


Рис. 3.

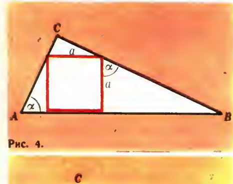


Рис. 4.

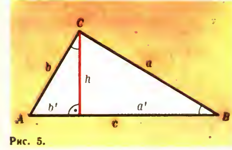


Рис. 5.

Пример 3 (МГУ, химфак, 1973). *В прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат так, что две вершины его лежат на гипотенузе, а две другие — на катетах. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, относится к стороне квадрата как $13:6$. Найти углы треугольника ABC.*

Пусть $\hat{A} = \alpha$, сторону квадрата обозначим через a (см. рис. 4). Тогда $|AB| = a \operatorname{ctg}\alpha + a + a \operatorname{tg}\alpha$, и

$$\frac{a \operatorname{ctg}\alpha + a + a \operatorname{tg}\alpha}{2a} = \frac{13}{6},$$

откуда $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha + 1 = 13/3$, $3\operatorname{tg}^2\alpha - 10\operatorname{tg}\alpha + 3 = 0$, $\alpha_1 = \operatorname{arctg} 3$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg} {}^1/_3$. Но углы α_1 и α_2 дополняют друг друга до прямого. Таким образом, углы треугольника ABC равны $\operatorname{arctg} 3$, $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} {}^1/_3$.

Утверждение 2. *Высота, проведенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит его на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному.*

Из этого утверждения вытекают следующие соотношения (обозначения см. на рис. 5):

$$h^2 = a'b', \quad a^2 = a'c, \quad b^2 = b'c,$$

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad \frac{a^2}{b^2} = \frac{a'}{b'}.$$

Добавим к ним еще формулы для вычисления площади прямоугольного треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch = mh = Rh.$$

Пример 4 (МФТИ, 1962). *В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CD. Известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны r_1 и r_2. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.*

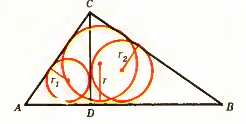


Рис. 6.

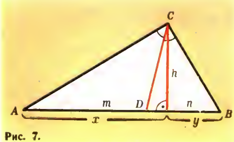


Рис. 7.

Согласно утверждению 2 треугольники ADC, CDB и ACB подобны (см. рис. 6). А в подобных треугольниках радиусы вписанных окружностей (как, впрочем, и любые другие соответственные линейные элементы) относятся как соответственные стороны. Поэтому

$$\frac{|AC|}{r_1}=\frac{|BC|}{r_2}=\frac{|AB|}{r}=k.$$

Отсюда, используя теорему Пифагора, получим: $r_1^2k^2+r_2^2k^2=r^2k^2$, $r^2=r_1^2+r_2^2$, $r=\sqrt{r_1^2+r_2^2}$.

Замечание. Полученная формула $r^2=r_1^2+r_2^2$ носит общий характер: *для любых соответственных линейных элементов* x, y, z *треугольников* ADC, CDB, ACB (рис. 6) *справедлива зависимость* $x^2+y^2=z^2$. Для доказательства этого утверждения достаточно вместо r_1, r_2, r подставить соответственно x, y, z.

Пример 5 (МФТИ, 1969). *В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса* CD *прямого угла* C. *Известно, что* $|AD|=m$, $|BD|=n$. *Найти высоту, опущенную из вершины угла* C.

Пусть x и y — длины проекций катетов на гипотенузу (рис. 7). Тогда $\frac{x}{y}=\frac{|AC|^2}{|BC|^2}$. Но

$$\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{m}{n}$$

(по свойству биссектрисы). Получается система

$$\begin{cases} x+y=m+n, \\ \frac{x}{y}=\frac{m^2}{n^2}. \end{cases}$$

Найдя из этой системы x и y, по формуле $h=\sqrt{xy}$ определим высоту:

$$h=\frac{mn(m+n)}{m^2+n^2}.$$

Утверждение 3 (обратное теореме Пифагора). *Если в треугольнике квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник прямоугольный.*

Это утверждение вытекает из теоремы косинусов, в ряде случаев оно бывает очень полезным.

Пример 6. *Пусть* a, b — *катеты прямоугольного треугольника* ABC, c — *гипотенуза,* h — *длина высоты, опущенной из вершины* C. *Доказать, что треугольник со сторонами* h, $c+h$, $a+b$ *является прямоугольным.*

Легко проверить, что $(a+b)^2+h^2=(c+h)^2$, так как это равносильно равенству $ab=ch$. Отсюда и следует утверждение задачи.

Хорошо известна формула $r=\frac{S}{p}$ (или $S=pr$), где S — площадь треугольника, p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности. Для прямоугольного треугольника радиус вписанной окружности можно вычислять по более простой формуле:

$$r=\frac{a+b-c}{2}.$$

Отметим также формулу

$$2r+2R=a+b$$

(последние две формулы эквивалентны). Попробуйте доказать эти формулы самостоятельно.

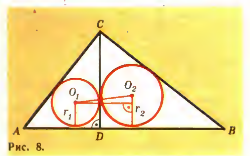


Рис. 8.

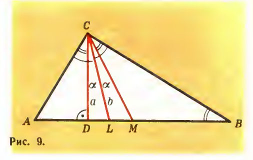


Рис. 9.

Пример 7 (МГУ, химфак, 1974). *В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $|AC| = 3$ и $|BC| = 4$ проведена высота CD. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD.*

Пусть r_1 и r_2 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD соответственно (рис. 8). Тогда

$$|O_1O_2| = \sqrt{(r_1+r_2)^2+(r_1-r_2)^2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{r_1^2+r_2^2}.$$

Но $\sqrt{r_1^2+r_2^2} = r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC (см. пример 4), поэтому

$$|O_1O_2| = \sqrt{2}\cdot r = \sqrt{2}\cdot\frac{|BC|+|AC|-|AB|}{2} = \sqrt{2}.$$

И, наконец, приведем еще одно утверждение, которое также бывает полезным для решения задач.

Утверждение 4. *В прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит пополам угол между высотой и медианой, проведенными из вершины того же угла.*

Доказательство этого утверждения ясно из рисунка 9.

Пример 8 (МГУ, ВМК, 1973). *В прямоугольном треугольнике ABC длина высоты, опущенной на гипотенузу, равна a, биссектрисы прямого угла — b. Найти площадь треугольника ABC.*

Проведем медиану CM (см. рис. 9) и положим $\widehat{DCL} = \alpha$; тогда, согласно утверждению 4, и $\widehat{LCM} = \alpha$. Далее,

$$\cos\alpha = \frac{a}{b},\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2a^2-b^2}{b^2},\ |CM| = \frac{a}{\cos 2\alpha} = \frac{ab^2}{2a^2-b^2}.$$

Теперь можно найти площадь треугольника ABC:

$$S = |CD|\cdot|AM| = |CD|\cdot|CM| = \frac{a^2b^2}{2a^2-b^2}.$$

Вы, наверное, уже обратили внимание, что все рассмотренные выше задачи решались алгебраическим методом. Это не удивительно, так как приведенные выше формулы представляют собой мощный арсенал для составления всевозможных уравнений. Однако не следует думать, что все задачи на прямоугольные треугольники решаются алгебраически — иногда полезно предварительно сделать некоторые дополнительные построения.

Пример 9 (МФТИ, 1971). *Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Расстояния от концов гипотенузы AB до прямой, касающейся окружности в точке C, соответственно равны m и n. Найти катеты $|AC|$ и $|BC|$.*

Проведем высоту CD (см. рис. 10) и заметим, что $\widehat{ACD} = \widehat{ABC} = \widehat{ACE}$ (последние два угла измеряются половиной одной и той же дуги AC). Поэтому треугольники AEC и ADC конгруэнтны (по гипотенузе и остро-

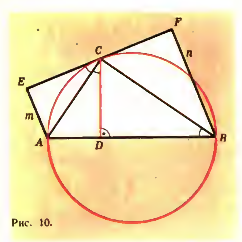


Рис. 10.

му углу). Следовательно, $|AD| = |AE| = m$. Аналогично можно доказать, что $|BD| = |BF| = n$. Теперь

$$|AC| = \sqrt{|AD|\cdot|AB|} = \sqrt{m^2 + mn},$$

$$|BC| = \sqrt{|BD|\cdot|AB|} = \sqrt{n^2 + mn}.$$

Упражнения

1 (МФТИ, 1963). Из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC опущена высота BD. Доказать, что ее длина равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC, ABD и BCD.

2 (МФТИ, 1963). Сумма катетов прямоугольного треугольника равна l, а длина высоты, опущенной из вершины прямого угла, равна h. Найти площадь треугольника.

3 (МФТИ, 1971). Периметр прямоугольного треугольника ABC ($\hat{C}=90°$) равен 72 *см*, а разность длин медианы CK и высоты CM равна 7 *см*. Найти площадь треугольника ABC.

4 (МГУ, химфак, 1973). В прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат $CEKM$ так, что точка K лежит на гипотенузе AB, а E и M — на катетах. Сторона этого квадрата относится к радиусу круга, вписанного в треугольник ABC, как $(2+\sqrt{2}):2$. Найти углы треугольника.

5 (МГУ, ВМК, 1973). В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса CL прямого угла. Из вершины A ($\hat{A}>45°$) на $[CL]$ опущен перпендикуляр AD. Найти площадь треугольника ABC, если $|AD|=a$, $|CL|=b$.

6 (МГУ, химфак, 1974). В прямоугольном треугольнике ABC с острым углом 30° проведена высота CD из вершины прямого угла C. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, если меньший катет треугольника ABC равен 1.

7 (МГУ, ф-т почвоведения, 1974). В прямоугольном треугольнике ABC ($\hat{C}=90°$) $|CA|=4$. На катете CB взята точка D так, что $|CD|=1$. Окружность радиуса $\sqrt{5}/2$ проходит через точки C и D и касается в точке C окружности, описанной около треугольника ABC. Найти площадь треугольника ABC.

8 (МГУ, экономический ф-т, 1974). В равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\hat{B}=90°$) вписан прямоугольник $MNKB$ так, что две его стороны MB и KB лежат на катетах, а вершина N — на гипотенузе AC. В каком отношении точка N должна делить гипотенузу, чтобы площадь прямоугольника составляла 18% площади треугольника?

9 (НГУ, 1971). В прямоугольный треугольник вписана окружность радиуса r. Радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен R. Найти длину гипотенузы.

10. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CD. Периметр треугольника ADC равен a, а треугольника BDC — b. Найти периметр треугольника ABC.

Задачи наших читателей

1. Доказать, что $1^{100} + 2^{100} + 3^{100} + \ldots + 999\,999^{100}$ делится на 100 000.

2. Доказать, что если a — нечетная цифра, то $a^{36} - 1$ делится на 1976.

М. Штеренберг
(г. Саратов)

3. Вычислить сумму

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}.$$

С. Сефибеков
(с. Кашкент Дагестанской АССР)

4. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, p — его полупериметр, $p_a = p - a$, $p_b = p - b$, $p_c = p - c$; r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей. Доказать следующие соотношения между элементами этого треугольника:

а) $\dfrac{p_a^2}{r_b r_c} + \dfrac{p_b^2}{r_c r_a} + \dfrac{p_c^2}{r_a r_b} = 1;$

б) $\dfrac{p_a p_b}{r_c^2} + \dfrac{p_b p_c}{r_a^2} + \dfrac{p_c p_a}{r_b^2} = 1.$

У. Алла
(г. Выру Эстонской ССР)

5. Решить уравнения

а) $\overline{xyz} = \overline{yz}^2$;

б) $x^y = \overline{yx}$;

в) $x^{y+2} = \overline{yx}$.

И. Михалкович
(Минская обл.)

Московский инженерно-физический институт

Московский ордена Трудового Красного Знамени инженерно-физический институт (МИФИ) организован в 1942 году. В создании института принимали участие крупнейшие ученые нашей страны во главе с И. В. Курчатовым. МИФИ готовит инженеров-исследователей широкого профиля по ряду новейших направлений науки. Срок обучения — 5 лет и 6 месяцев.

МИФИ — один из ведущих вузов страны. В составе МИФИ — пять факультетов, есть один филиал, работает подготовительное отделение. При институте созданы факультет повышения квалификации преподавателей вузов страны по физике, Всесоюзная школа по ядерной физике и кафедра физики, на которую возложена подготовка и передача по центральному телевидению лекций по общей физике для студентов-заочников и учебных передач по физике и математике для поступающих в вузы.

Факультет экспериментальной и теоретической физики готовит инженеров-физиков и инженеров-математиков для исследовательской работы в области теоретической и экспериментальной физики, разработки современных физических установок и систем.

Факультет технической физики выпускает инженеров-физиков, специализирующихся в области теоретического и экспериментального исследования ядерных, теплофизических, газодинамических, молекулярно-кинетических и электромагнитных процессов, конструирования и эксплуатации физических установок и приборов, а также в области создания и исследования новых материалов.

Факультет автоматики и электроники выпускает инженеров-физиков, специализирующихся в области создания и эксплуатации электрофизических установок, систем автоматического управления технологическими и физическими процессами, разработки электронных устройств современных технических систем.

Факультет кибернетики готовит инженеров-системотехников и инженеров-математиков по разработке и математическому обеспечению современных быстродействующих электронных вычислительных машин и автоматизированных систем управления.

Специальный факультет физики (СФФ) организован при МИФИ и Физическом институте им. П. Н. Лебедева АН СССР в 1972 году. Он является новой формой обучения и готовит инженеров-физиков по новейшим направлениям физики. На факультет зачисляются студенты из немосковских высших учебных заведений, имеющие образование в объеме двух с половиной курсов физических и физико-математических факультетов и проявившие склонность к научной работе. Обучение на СФФ производится по индивидуальным планам. В настоящее время на СФФ занимаются студенты из 28 университетов и 4 политехнических институтов.

Филиал МИФИ в г. Обнинске готовит инженеров-теплофизиков по разработке и эксплуатации атомных электростанций и установок, инженеров-системотехников по проектированию и эксплуатации автоматизированных систем управления, инженеров-математиков по применению средств вычислительной техники.

Подготовительное отделение работает на правах отдельного факультета. Передовые рабочие, колхозники и демобилизованные воины в течение одного учебного года занимаются математикой, физикой, русским языком и литературой, они получают стипендию на правах студентов младших курсов. После успешно сданных выпускных экзаменов слушатели этого отделения зачисляются на 1-й курс МИФИ без дополнительных вступительных экзаменов.

Свыше тысячи слушателей обучаются на подготовительных платных курсах и курсах рабочей молодежи.

Ниже приводятся некоторые варианты письменного вступительного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике 1976 года. Устные вопросы формулируются в соответствии с программой для поступающих в вузы.

Математика

Вариант 1

1. От пристани A одновременно отправились вниз по течению реки катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 *км*, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 часов. Найти скорость катера в стоячей воде и скорость течения реки, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 *км* от A.

2. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точка пересечения медиан

треугольника лежит на этой окружности. Найти угол при основании равнобедренного треугольника.

3. Решить неравенство $3^{\sqrt{x}} > 2^{a}$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна половине суммы следующих n членов этой прогрессии. Найти отношение суммы первых $3n$ членов прогрессии к сумме ее первых n членов.

2. В правильную треугольную усеченную пирамиду с двугранным углом α при основании вписан усеченный конус. Определить боковую поверхность конуса, если апофема боковой грани пирамиды равна сумме радиусов оснований конуса, а радиус меньшего основания конуса равен r.

3. Решить неравенство

$$0{,}3^{\log_{1/3}\log_2 \frac{3x+6}{3x^2+2}} > 1.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \dfrac{1}{4}, \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Если двухзначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найти это число.

2. Куб с ребром a вписан в правильную четырехугольную пирамиду так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах, а четыре другие вершины — на основании пирамиды. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Определить объем пирамиды.

3. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2}\left(\frac{a^2-4}{2a-x}\right) = 1.$$

4. Решить уравнение

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}\cos 2x.$$

Физика

1. Если к источнику тока подключить последовательно два различных вольтметра, то их показания будут $U_1 = 6$ *в* и $U_2 = 3$ *в*. Если подключить один первый вольтметр, то он покажет напряжение $U' = 8$ *в*. Пренебрегая сопротивлением соединительных проводов, определить э. д. с. $\mathscr{E}$ источника тока.

2. В однородном магнитном поле расположен виток с сопротивлением $R = 0{,}5$ *ом* и площадью $S = 100$ *см*^{2}. Нормаль к плоскости витка составляет угол $\alpha = 60°$ с вектором индукции **B**. За время $\tau = 0{,}5$ *сек* индукция поля увеличилась с постоянной скоростью от $B_1 = 0{,}1$ *тл* до $B_2 = 0{,}6$ *тл*. Найти количество теплоты, которое выделилось в витке за это время.

3. При облучении некоторого металла светом сначала с длиной волны $\lambda_1 = 0{,}3$ *мкм*, а затем — с $\lambda_2 = 0{,}6$ *мкм* обнаружили, что соответствующие максимальные скорости фотоэлектронов отличаются друг от друга в $n = 2$ раза. Найти работу выхода электрона с поверхности этого металла.

А. Диденко, А. Забоев, Г. Пантюхов, Н. Шолохов

Головоломки

Магическое домино

Из 28 костей домино сложите прямоугольник 7×8 такой, что если не учитывать семи «пустых» квадратов, образующих последний столбец, то из 49 клеток составлен «магический квадрат» (в котором суммируются очки половинок костей) — суммы очков по горизонталям, вертикалям и двум диагоналям одинаковы и равны 24.

Л. Мочалов

1976

Расставьте в этих клетках числа от 1 до 27 (четыре числа уже стоят) так, чтобы суммы чисел в каждом горизонтальном ряду были равны друг другу и суммам каждых восьми чисел, стоящих вокруг чисел 1, 9, 7, 6.

	1		9		7		6	

Я. Алексеев



З. Моисеева,
А. Савин

XVIII Олимпиада по математике

XVIII Международная математическая олимпиада проходила в июле 1976 г. в г. Лиенце (Австрия). В ней принимали участие команды 18 стран: Австрии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, Вьетнама, ГДР, Греции, Кубы, Нидерландов, Польши, Румынии, СССР, США, Финляндии, Франции, Чехословакии, Швеции, Югославии. (В качестве наблюдателей присутствовали представители ФРГ.) Команда каждой страны состояла из восьми школьников и двух руководителей, кроме Кубы, команда которой состояла из трех школьников и руководителя.

Для большинства участников XVIII Международная олимпиада явилась естественным продолжением национальных олимпиад. У нас в стране после республиканских олимпиад их победители участвовали в специальных отборочных соревнованиях. Затем с учетом результатов, показанных ребятами на всесоюзных олимпиадах этого и прошлых лет, и был определен окончательный состав команды. В нее вошли: *Юрий Буров* (школа № 2 г. Москвы), *Александр Гончаров* (школа № 13 г. Никополя Днепропетровской обл.), *Петр Гриневич* (школа № 204 г. Москвы), *Сергей Миронов* (школа № 6 г. Сафонова Смоленской обл.), *Никита Нецветаев*, *Борис Соломяк* и *Сергей Финашин* (все — ФМШ № 45 г. Ленинграда), *Татьяна Хованова* (школа № 444 г. Москвы).

Поездке на Международную олимпиаду предшествовал месячный учебно-тренировочный сбор, по традиции проводимый в школе памяти В. И. Ленина в Горках Ленинских. Поскольку состав команды был определен заранее, сбор этого года носил чисто тренировочный характер,— ребята работали без дополнительной нервной нагрузки, вызываемой в прошлые годы неизвестностью: кто же из них поедет на Международную олимпиаду. В результате команда оказалась в хорошей форме.

Во время сбора было проведено три тренировочных соревнования. Для интересующихся читателей приводим задачи одного из них.

1. Построить треугольник по центрам вписанного, описанного и вневписанного кругов.

2. Все корни некоторого многочлена с комплексными коэффициентами лежат в

открытой полуплоскости, граница которой проходит через точку 0. Доказать, что все коэффициенты многочлена отличны от нуля.

3. Решить уравнение

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}}$$

(знак дроби употреблен n раз).

4. Доказать, что если в треугольнике перпендикуляры, восставленные из оснований биссектрис, пересекаются в одной точке, то треугольник равнобедренный.

5. Дано: $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 9}{10x_n}$.

Доказать, что

$$1 - 10^{-10} < x_{100} < 1 + 10^{-10}.$$

Кроме решения различного рода задач, на сборах было уделено большое внимание и теоретической подготовке участников. В прошлые годы «ахиллесовой пятой» нашей команды были задачи на многочлены, поскольку эта тема в школьных программах практически отсутствует. В этом году вопросам алгебры многочленов, областям Дирихле, теории графов и некоторым другим вопросам было уделено достаточно много времени, что позволило нашей команде на олимпиаде успешно справиться с задачами такого рода.

9 июля советские школьники прибыли в Вену, откуда на следующий день вместе с командами других стран поехали к месту проведения XVIII Международной математической олимпиады в г. Линц, столицу Восточного Тироля. Маршрут этой экскурсии протяженностью около 600 км проходил по живописным местам южной части Австрии. Надолго в памяти ребят останутся романтические альпийские пейзажи (более 50% территории Восточного Тироля расположено выше 2000 м над уровнем моря): луга, пересеченные множеством бурлящих безымянных ручейков и речушек, белоснежные вершины гор, леса.

Соревнования проводились 12 и 13 июля. В каждый из дней школьникам предлагалось по три задачи, на решение которых отводилось по 4 часа (тексты задач помещены в конце статьи, в скобках указано, какой страной была предложена задача и сколько очков давалось за ее полное решение; указания к решению задач помещены в конце журнала).

Работы, как всегда, проверялись руководителями команд, а окончательная оценка выставлялась совместно с координаторами — австрийскими математиками. Работа координаторов и жюри была завершена к 17 июля.

Нужно отметить, что реальная трудность задач несколько разошлась с оценкой жюри. Наиболее сложной оказалась пятая задача, по которой участники соревнований собрали лишь 15% возможного числа очков. Следующей по сложности оказалась вторая задача (26%), затем третья (38%), первая (52%), четвертая (62%) и шестая (65%). Разной оказалась и трудность отдельных задач для команд разных стран. Видимо, успехи школьников различных стран при решении той или иной задачи тесно связаны с программой их обучения в школе. Так, англичане и французы традиционно хорошо решают задачи на многочлены и экстремумы, шведы — экстремальные задачи и т. п. Почти все команды успешно справились с шестой задачей, в которой нужно было увидеть некоторую закономерность и доказать ее методом математической индукции, исключение составили лишь те страны, где этот метод доказательства не нашел широкого применения в программах и учебниках (Финляндия, Голландия, Греция, Куба). Немногие школьники справились с пятой задачей (система линейных уравнений), не заметив под алгебраической оболочкой ее комбинаторный характер.

Наши школьники выступили довольно ровно по всем задачам и набрали по первой задаче 90% возможного числа очков, по второй — 79%, по третьей — 72%, по четвертой — 95%,



Команда СССР на XVIII Международной математической олимпиаде (слева направо) стоят: Н. Нецветаев, С. Миронов, А. Гончаров, Б. Соломяк, С. Финашин, Ю. Буров, П. Гриневич; сидят: Т. Хованова, З. И. Моисеева (зам. руководителя команды), А. П. Савин (руководитель команды), С. Конягин (участник международных олимпиад 1972, 1973 г., тренер команды).

по пятой — 57% и по шестой — 81%.

Утром 18 июля участники олимпиады на автобусах отправились в Вену, познакомившись по дороге со старинным городом Зальцбургом, а на следующий день осмотрели Вену и ее окрестности, посетили музей истории искусств.

Торжественное закрытие олимпиады проходило 20 июля в Ратуше. Призеры получили дипломы и ценные подарки.

I премию
получили девять участников, набравшие от 40 до 34 очков: *Л. Пьер* (Франция, 40 очков), *Т. Хованова* (СССР, 39), *М. Клейман* (США, 38), *А. Гончаров* и *С. Финашин* (оба СССР, по 37), *Д. Рикард* (Великобритания, 35), *Н. Нецветаев* (СССР, 34), *К. Гриль* (Австрия, 34), *Р. Месон* (Великобритания, 34).

II премию
получили 28 школьников, набравших от 31 до 23 очков. Среди них трое советских ребят: *Б. Соломяк* (31 очко), *П. Гриневич* (26) и *С. Миронов* (24).

III премию
получили 44 участника, набравшие от 22 до 15 очков. Среди них советский школьник *Ю. Буров* (22 очка).

В неофициальном командном зачете первые десять мест распределились так: СССР (250 очков), Великобритания (214), США (188), Болгария (174), Австрия (167), Франция (165), Венгрия (160), ГДР (142), Польша (138), Швеция (120). При этом лишь в командах СССР, Болгарии и Австрии все восемь участников получили награды.

Необходимо заметить, что олимпиада прошла организованно, в духе дружбы и взаимопонимания. Участники рассказали о своих странах, узнали многое о других, обменялись памятными подарками, значками, сувенирами. Эта олимпиада несомненно оказала большое влияние на воспитание молодежи в духе дружбы и взаимного уважения людей различных национальностей и рас.

Задачи XVIII Международной математической олимпиады школьников

1-й день

1. Площадь плоского выпуклого четырехугольника равна 32 *см*^{2}, а сумма длин двух противоположных сторон и одной диагонали равна 16 *см*. Указать все значения, которые может принимать длина другой диагонали. (Чехословакия, 5 очков.)

2. Пусть $P_1(x) = x^2 - 2$, $P_k(x) = P_1(P_{k-1}(x))$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Доказать, что для любого натурального n все корни уравнения $P_n(x) = x$ вещественны и различны. (Финляндия, 7 очков.)

3. Прямоугольная коробка может быть полностью наполнена единичными кубами (ребра кубов параллельны ребрам коробки). Если же заполнять коробку кубами объема 2 с ребрами, параллельными ребрам коробки, то максимальное число таких кубов заполнит лишь ровно 40% объема коробки. Указать внутренние размеры всех коробок, для которых это имеет место ($\sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599$). (Нидерланды, 8 очков.)

2-й день

4. Найти наибольшее значение, которое может принять произведение нескольких натуральных чисел, сумма которых равна 1976. (США, 6 очков.)

5. В системе p уравнений с $q = 2p$ неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1q}x_q = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pq}x_q = 0 \end{cases}$$

коэффициенты $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$. Доказать, что существует решение $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ этой системы такое, что все x — целые, для некоторого j $(1 \leqslant j \leqslant q)$ $x_j \neq 0$ и для всех j $(1 \leqslant j \leqslant q)$ $|x_j| \leqslant q$. (Нидерланды, 7 очков.)

6. Последовательность $\{u_n\}$ определена следующим образом: $u_0 = 2$, $u_1 = 5/2$, $u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2)^{-1}u_1$ $(n \geqslant 1)$. Доказать, что при $n \geqslant 1$

$$[u_n] = 2^{(2^n - (-1)^n)/3},$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x. (Великобритания, 7 очков.)

И. Слободецкий

IX Олимпиада по физике

С 1 по 7 июля в Будапеште проходила очередная IX Международная олимпиада по физике среди школьников. Такие олимпиады начали проводиться с 1967 года. Первая Международная олимпиада была организована по инициативе Польской народной республики. В ней приняли участие школьники пяти социалистических стран: Болгарии, Венгрии, Польши, Румынии и Чехословакии. Уже в следующем, 1968 году, к участникам олимпиады из этих стран присоединились учащиеся Германской демократической республики, Советского Союза и Югославии. С тех пор команда нашей страны участвует во всех олимпиадах. А в 1970 году Москва принимала у себя участников IV Международной физической олимпиады.

Олимпиада включает в себя решение трех теоретических задач и выполнение одной экспериментальной работы. Теоретический и экспериментальный туры проводятся в разные дни. На решение задач и выполнение эксперимента дается по 5 часов. Все задачи готовятся страной, проводящей олимпиаду. Эта страна обеспечивает и проверку работ, но результаты проверки окончательно утверждаются Международной комиссией, состоящей из руководителей всех команд. Председателем Международной

комиссии в этом году был академик Академии наук Венгрии Г. Маркс.

По статуту олимпиады задачи составляются на основе специальной программы. Эта программа, в основном, включает все те вопросы, которые изучаются в средних школах всех стран-участниц. Но имеются и некоторые дополнения. Например, тема «Вращательное движение твердых тел», которую не изучают школьники нашей страны.

В этом году в олимпиаде участвовали команды из 10 стран: Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Румынии, СССР, Франции, ФРГ, Чехословакии и Швеции. На олимпиаде также присутствовал наблюдатель из Финляндии. Каждая команда, как всегда, состояла из 5 участников.

В состав команды СССР вошли победители Всесоюзной олимпиады, показавшие хорошие результаты на трехнедельных тренировочных сборах в Горках Ленинских:

Владимир Булатов — выпускник физико-математической школы-интерната № 45 при Ленинградском государственном университете;

Андрей Голубенцев — выпускник средней школы № 13 г. Саратова;

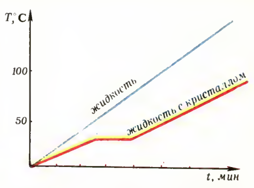
Владимир Кривцун — выпускник средней школы № 27 г. Харькова;

Валерий Старшенко — выпускник средней школы № 28 г. Запорожье;

Ильдар Хамитов — выпускник физико-математической школы-интерната № 45 при Ленинградском государственном университете.

Конечно, во время олимпиады проходили интересные встречи, были организованы экскурсии по Дунаю, вдоль озера Балатон и в веселый Будапештский Луна-парк. Но главное— это решение задач.

Какие же задачи достались участникам олимпиады? Все теоретические задачи помещены в «Задачнике «Кванта» (см. задачи Ф428, Ф429 и Ф432 в этом номере журнала). По трудности они примерно такие же, как задачи заключительного тура Всесоюзной олимпиады. За решение каждой



теоретической задачи максимально можно было получить 10 очков. Наибольшее количество очков (9 и 10) за решение первой задачи получили 13 участников, второй — 14 и третьей — 8.

За выполнение экспериментальной работы можно было получить до 20 очков. Задача была такой:

На рабочем столе имеются: часы, термометр, нагревательный элемент на 12 *в*, две пробирки с жидкостью известной удельной теплоемкости $c_0 = 0{,}5$ *кал*/(*г·град*) и кристаллический материал *X* с неизвестными тепловыми свойствами. Количество жидкости в пробирках и масса кристалла *X* известны. Материал *X* в жидкости не растворяется.

Исследуйте тепловые свойства материала *X* в интервале от комнатной температуры до 80°C и определите его характерные тепловые константы. Результаты измерений представьте в виде таблиц и графиков.

Вы можете распоряжаться только теми приборами и материалами, которые находятся на столе. Испорченные Вами приборы и использованные материалы не заменяются.

Эту задачу нельзя назвать трудной, однако до конца довели ее немногие. Если за теоретические задачи примерно 20% участников набрали 27—30 очков, то за экспериментальную работу получили 19—20 очков лишь 4 участника, т. е. меньше 10%.

Приведем краткое решение экспериментальной задачи.

В ходе выполнения работы нужно построить графики зависимости от времени температуры чистой жидкости (подогреваемой нагревателем) и жидкости вместе с кристаллическим материалом *X* (см. рисунок). Из рисунка видно, что второй график имеет почти горизонтальный участок; это свидетельствует о наличии фазового перехода,

т. е. плавления кристалла X. Пользуясь этими графиками, можно определить температуру плавления кристалла, удельную теплоемкость кристалла и расплава и удельную теплоту плавления кристалла. Так как масса кристалла была невелика, естественно было считать, что при нагревании пробирки теплоотвод (учитывая и нагревание самой пробирки) во всех случаях один и тот же. Неизменен, разумеется, и приток тепла от нагревателя.

Температура плавления кристалла определяется непосредственно из графика.

Удельную теплоемкость кристалла надо было вычислить, составив уравнения теплового баланса для чистой жидкости и для жидкости с кристаллом. При нагревании в пробирке чистой жидкости выполняется равенство

$$c_0 m_ж \Delta T = \Delta W t. \qquad (1)$$

Здесь $m_ж$ — масса жидкости, ΔW — разность между мощностью источника (притоком тепла) и мощностью потерь (теплоотводом), t — время и ΔT — изменение температуры жидкости за это время. Аналогично при нагревании жидкости с кристаллом

$$c_0 m_ж \Delta T_1 + c_к m_к \Delta T_1 = \Delta W t_1, \qquad (2)$$

где $c_к$ — удельная теплоемкость кристалла, $m_к$ — его масса, t_1 — новое время и ΔT_1 — новое изменение температуры.

Обозначим $\Delta T/t$ и $\Delta T_1/t_1$ через α и α_1 соответственно. На рисунке α и α_1 — тангенсы углов наклона графиков зависимости температуры в пробирке от времени (естественно, до момента начала плавления). Уравнения (1) и (2) можно переписать так:

$$c_0 m_ж \alpha = \Delta W, \qquad (1')$$

$$c_0 m_ж \alpha_1 + c_к m_к \alpha_1 = \Delta W. \qquad (2')$$

Разделив второе уравнение на первое, получим

$$1 + \frac{c_к}{c_0}\frac{m_к}{m_ж} = \frac{\alpha}{\alpha_1},$$

откуда

$$c_к = c_0 \frac{m_ж}{m_к}\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_1}.$$

Определив по графикам α и α_1, нетрудно найти $c_к$.

Аналогично можно было определить удельную теплоемкость расплава.

Для того чтобы найти удельную теплоту плавления кристалла λ, надо было составить еще одно уравнение теплового баланса:

$$\lambda m_к = \Delta W t_2, \qquad (3)$$

где t_2 — время плавления кристалла. Разделив это уравнение на уравнение (1′), получим

$$\frac{\lambda m_к}{c_0 m_ж} = \alpha t_2,$$

откуда

$$\lambda = c_0 \frac{m_ж}{m_к} \alpha t_2.$$

Все эти расчеты можно было провести и более аккуратно. Во-первых, из-за неравномерности нагрева температура жидкости и кристалла во время плавления несколько повышалась (см. рисунок). Поэтому в левой части уравнения (3) должны присутствовать члены $c_0 m_ж \Delta T_2$ и $c_к m_к \Delta T_2$ (ΔT_2 — соответствующее изменение температуры за время t_2). Правда, не совсем ясно, как быть со вторым членом, — при плавлении кристалла меняется его удельная теплоемкость. Впрочем, им совсем можно было пренебречь, что не вносило большой ошибки. Во-вторых, можно было учесть в явном виде теплоемкость самой пробирки. Для этого было бы достаточно, например, построить график изменения температуры со временем для пробирки с другим количеством жидкости.

При определении тепловых параметров кристалла X считалась удовлетворительной точность до 20%. Получить ее, в принципе, было несложно. Однако многим участникам олимпиады это оказалось не под силу.

Результаты олимпиады таковы:

I премию

получили участники олимпиады, набравшие от 42 до 47,5 очков. Это — *В. Булатов* (СССР), *В. Кривцун* (СССР), *К. Кульпа* (Польша), *Р. Лубис* (Польша), *А. Порсон* (Франция), *Г. Попеску* (Румыния) и *И. Хамитов* (СССР).

II премию

получили 7 участников, набравшие от 37 до 42 очков. Среди них *А. Голубенцев*.

III премию

получили 12 участников, набравшие от 30 до 37 очков.

Грамоты

получили 13 участников, набравших от 23 до 30 очков. Среди них *В. Старшенко*.

Абсолютным победителем олимпиады стал польский школьник *Р. Лубис*. Он получил высшую оценку — 20 очков — за экспериментальную ра-







боту и 27,5 очков за теоретические задачи. Такие же результаты по теоретическому туру были у членов нашей команды В. Кривцуна и И. Хамитова, а также у М. Хегнера из ГДР. Однако на экспериментальном туре В. Кривцун и И. Хамитов потеряли по 5 очков, а М. Хегнер — 10 очков.

Официального командного первенства на олимпиаде не проводилось. Но, конечно, все подсчитывали, сколько очков набрала каждая команда, сколько премий и грамот получили ее члены. В частности, наша команда получила три первые премии, одну вторую премию и одну грамоту. Члены нашей команды набрали в сумме 192,75 очка. Команда Румынии набрала 181 очко, команда ГДР — 174 очка.

В заключение хочется отметить очень хорошую организацию IX Международной олимпиады по физике. Этим участники олимпиады обязаны Министерству народного образования Венгрии, Физическому обществу им. Р. Этвеша и кафедре атомной физики Будапештского университета. Очень хорошо были проверены все работы, несмотря на их многоязычие. У Международного комитета почти не было претензий по оценкам. На олимпиаде царил дух доверия, взаимопонимания и дружбы.

Советские школьники Владимир Булатов, Владимир Кривцун и Ильдар Хамитов, получившие I премию, во время выполнения экспериментальной работы.

Фото Ласло Кемени



Всесоюзный конкурс общества «Знание»

Общество «Знание» ежегодно проводит Всесоюзный конкурс на лучшую научно-популярную книгу и брошюру, в котором принимают участие центральные и республиканские издательства. В 1976 году на конкурс поступили 191 книга и 282 брошюры, изданные в 1975 году. Среди них были 42 книги и брошюры, посвященные различным проблемам физики, математики, астрономии и космонавтики. Жюри конкурса под председательством академика А. Л. Яншина отметило некоторые из них почетными дипломами и денежными премиями.

Диплом второй степени получила научно-популярная книга члена-корреспондента АН СССР И. С. Шкловского «Звезды: их рождение, жизнь и смерть», о которой мы уже рассказали в рецензии В. Бронштэна «Как рождаются, живут и умирают звезды», опубликованной в восьмом номере нашего журнала.

Второй такой же диплом присужден научно-популярной книге профессора Н. Я. Виленкина «Популярная комбинаторика», выпущенной издательством «Наука» (см. рецензию М. Смолянского «Комбинаторика — что это такое?» в этом номере журнала).

Еще один диплом второй степени присужден сборнику научно-популярных статей под названием «Школьникам о современной физике. Физика твердого тела», выпущенному издательством «Просвещение». Об этом сборнике мы подробно рассказали в двенадцатом номере нашего журнала за 1975 год (см. рецензию Б. М. Яворского «Школьникам о физике твердого тела»).

Очень интересна также книга Р. С. Гутера и Ю. Л. Полунова «От абака до компьютера» из серии «Жизнь замечательных идей», выходящей в издательстве «Знание». В ней рассказывается история вычислительной техники с древнейших времен до наших дней. Но не только техники, а и ее творцов — Морлэнда, Бэрроуза, Стэнхоупа, Бэббеджа, Айкена и многих других математиков и механиков. Эта книга также получила диплом второй степени.

Поощрительный диплом получила книга «Поиски и открытия планет», написанная докторами физико-математических наук Е. А. Гребениковым и Ю. А. Рябовым (издательство «Наука»). Рассказ о ней помещен в предыдущем номере нашего журнала. Такой же награды удостоена книга Л. А. Левнпова и Г. В. Сапгира «Приключения Кубарика и Томатика, или веселая математика» (ч. I), рассчитанная на дошкольников. Книга выпущена издательством «Просвещение».

Жюри отметило также несколько научно-популярных брошюр по физике, математике и астрономии, выпущенных издательством «Знание».

Диплом первой степени присужден брошюре «Современная культура и математика», написанной академиком В. М. Глушковым, академиком АН УССР Б. В. Гнеденко и кандидатом физико-математических наук А. И. Коронкевичем.

Брошюра содержит три статьи по общим проблемам математики. Первая статья называется «Математика в истории человечества», вторая — «Об источниках нового в математике» и третья — «Роль математики в современной науке». Она издана в серии «Математика. Кибернетика».

Диплом второй степени присужден брошюре члена-корреспондента АН СССР Г. Т. Зацепина и кандидата физико-математических наук В. С. Березинского «Нейтринная астрофизика». В необычайно живой, почти художественной форме в ней рассказано о сложных проблемах поиска и регистрации нейтрино — этих, казалось бы, совершенно неуловимых элементарных частиц.

Нейтринная астрофизика — новая область современной науки. Она позволяет решать проблемы, кажущиеся совершенно невероятными. До недавних пор астрономы регистрировали электромагнитные волны и частицы, рождающиеся на поверхностях небесных тел. Теперь, благодаря нейтринной астрофизике, они получают возможность заглядывать в недра этих тел. Ведь нейтрино рождаются внутри звезд в результате происходящих там термоядерных реакций. Так как нейтрино способны проходить без столкновений огромные толщи вещества, они уносят с собой неискаженную информацию о процессах, происходящих внутри звезд. Мы до сих пор не знаем, как выглядят недра Земли на глубине более двух десятков километров. А нейтринные телескопы принесут нам сведения о состоянии звездных недр.

Такой же диплом получила брошюра члена редакционной коллегии нашего журнала «Квант» профессора Я. А. Смородинского «Тяготение», о которой мы рассказали в десятом номере наше-

го журнала (см. рецензию В. Лешковцева «Новое о гравитации»). Она вышла в серии «Физика».

Трем брошюрам присуждены поощрительные дипломы.

Брошюра доктора физико-математических наук А. Г. Постникова называется «Культура занятий математикой (из записок ученого)». Она представляет собой явление, необычайно редкое в нашем книжном мире. Используя богатый личный опыт, а также опыт известных ему ученых, автор исследует многочисленные проблемы психологии математического творчества. Как правильно оценить свои способности, как их развивать и совершенствовать, как лучше организовать свои занятия — множество интересных мыслей пробуждает эта брошюра даже у тех читателей, которые не намерены связывать свою жизнь с математикой. Ну, а те, кто любит математику, непременно должны ее прочитать. Она выпущена в серии «Математика. Кибернетика».

Вторая брошюра — «Переменные звезды» — написана членом редакционной коллегии нашего журнала кандидатом физико-математических наук Ю. Н. Ефремовым. Она вышла в серии «Космонавтика. Астрономия».

Третья брошюра — Жидкие кристаллы» — написана доктором физико-математических наук И. Г. Чистяковым и кандидатом физико-математических наук Л. К. Вистинь. Она вышла в серии «Новое в жизни, науке, технике». В ней рассказывается о необычном состоянии многих органических веществ, при котором текучесть, свойственная жидкости, сочетается с упорядоченностью молекул, присущей твердым кристаллам. Авторы описывают физические свойства жидких кристаллов, а также их практические применения.

В. Рудов

Комбинаторика — что это такое?

В прошлом году увидела свет новая книга известного ученого и популяризатора науки Н. Я. Виленкина — «Популярная комбинаторика» *).

В 1969 году в Главной редакции физико-математической литературы издательства «Наука» была напечатана его же книга «Комбинаторика». Она получила всемирное признание и была переведена на многие языки (английский, немецкий, испанский, польский, венгерский, чешский, эстонский).

Рецензируемая книга очень мало напоминает свою предшественницу. Из шести глав три написаны заново, а остальные три — полностью переработаный текст из книги «Комбинаторика».

Начинается «Популярная комбинаторика» главой из истории комбинаторики и ее приложений. Здесь рассказано о первых магических квадратах, о фигурных числах, о комбинаторных работах астрологов, занимавшихся сочетаниями планет, о том, как схоласт Раймонд Люллий пытался создать машину, дающую различные сочетания понятий, и о комбинаторных задачах, возникавших в азартных играх. Автор рассказывает о том, как комбинаторика выделилась в самостоятельную ветвь математики, о работах Паскаля, Ферма, Лейбница и Эйлера. Без сомнения, большой интерес вызовут у читателя рассказы о приложениях комбинаторики к разгадке древних письменностей, к изучению генетического кода, к открытию периодической системы Менделеева. Жаль только, что автор совсем не останавливается на применениях комбинаторики к технике и на комбинаторике кристаллических решеток.

Вторая глава посвящена классификации комбинаторных задач.

Следуя известной книге Бержа, автор делит комбинаторные проблемы следующим образом:

1. Найти конфигурацию элементов, обладающую заранее заданными свойствами.
2. Доказать существование (или отсутствие) конфигурации с заданными свойствами.
3. Найти общее число конфигураций с заданными свойствами.
4. Описать все способы решения данной комбинаторной задачи, дать алгоритм их перечисления.
5. Из всех решений данной комбинаторной задачи выбрать оптимальное (по тем или иным параметрам).

На примере магических квадратов и задачи о ферзях он показывает, как ищутся конфигурации с заданными свойствами, потом рассказывает об общем принципе решения проблем оптимизации: если решение является оптимальным в целом, то оно должно быть оптимальным в любой своей части (этот принцип лежит в основе так называемого динамического программирования *)). На примере «игры в 15» показывается, как можно доказать невозможность решения некоторой задачи. Рассмотрев известную олимпиадную задачу о научной переписке:

Шесть ученых переписываются друг с другом по двум научным темам. Каждый переписывается с каждым по одной теме. Докажите, что найдутся трое ученых, переписывающихся между собой по одной и той же теме,

---

*) Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика. М., «Наука», 1975.

*) «Квант», 1972, № 3, с. 6.

— автор разбирает потом ее различные обобщения и усложнения: переписку 17 ученых по трем темам, придание различного веса отдельным темам и т. д., подводя читателя к формулировке общей теоремы Рамсея. Следует пожалеть, что объем и характер книги не дали возможности привести в общем виде доказательство этой замечательной теоремы.

Далее разбирается *теорема о различных представителях* (или, как ее еще называют, *теорема о деревенских свадьбах*), которая дана с полным доказательством. Эта теорема дает автору повод поговорить о графах и комбинаторных задачах теории графов. Кончается глава более известным материалом теории графов — эйлеровыми маршрутами (обходом графа, при котором ни одно ребро не проходится дважды), гамильтоновыми путями (замкнутыми путями, проходящими по одному разу через каждую вершину графа), задачей о четырех красках и т. д. Как и все последующие главы, она содержит много разнообразных задач (всего в книге приведено более 400 задач). К сожалению, большинство задач второй главы носит олимпиадный характер. Они могут создать впечатление, что и задачи последующих глав будут столь же трудны, хотя это совсем не так — многие задачи третьей, четвертой и пятой глав совсем простые.

В третьей главе изложена «классическая комбинаторика» — размещения, перестановки и сочетания как с повторениями, так и без них. При изложении этих вопросов автор систематически использует язык теории множеств и понятие кортежа. Это позволило ему четко определить основные понятия. Хотя, как и во всей книге, изложение ведется путем разбора более или менее занимательных задач, на самом деле эта глава представляет собой учебное пособие по комбинаторике, написанное достаточно четко и систематично. Переход на теоретико-множественный язык позволил естественно включить сюда разбор *формулы включений и исключений* (формулы перекрытий), позволяющей найти число элементов в объединении нескольких конечных множеств, если известно число элементов в каждом множестве, а также в пересечении любого набора этих множеств.

Следующая глава называется «Комбинаторика раскладок и разбиений». Об этих вопросах шла речь и в предыдущей книге автора, но теперь изложение стало четче и компактнее. Появился новый материал, например, рассказано о числах Белла, то есть о числе различных возможностей разбить данное конечное множество на непересекающиеся подмножества, а также о числах Стирлинга 1-го рода, то есть о числе способов разложить n различных предметов в m неразличимых ящиков так, чтобы все ящики были непустыми.

Была в предыдущей книге и глава «Комбинаторные задачи с ограничениями». Но теперь, вместо разбора отдельных, почти не связанных друг с другом задач, дано изложение общих понятий и формул. В частности, автор дает общую формулу для вычисления так называемых *ладейных многочленов*. Он восстанавливает историческую справедливость, отмечая, что ладейные числа (число способов поставить на доску данной формы n ладей так, чтобы ни одна пара ладей не могла взять друг друга) были введены и изучены советским математиком С. Е. Аршоном за десять лет до того, как этими числами стали заниматься американские математики Каплanский и Риордан. Заканчивается глава задачами о мажордоме короля Артура и об очереди в кассу.

Последняя, шестая, глава книги рассказывает о комбинаторных задачах, связанных с теорией групп — о комбинаторике орбит. Типичной задачей такого рода является отыскание числа способов покрасить вершины куба в k цветов. Общий способ решения таких задач основан на некоторых понятиях теории групп *). Хотя автору удалось найти более простое изложение этого метода, чем встречающееся в большинстве книг по комбинаторике (в популярной литературе этот метод, насколько нам известно, никогда не излагался), конец главы несколько труден для читателя, которому адресована книга.

Таким образом, в целом получилась очень интересная и живо написанная книга по комбинаторике. Однако приходится сожалеть, что задачи, приведенные в книге, даны не только без решений, но и без ответов.

Новая книга Н. Я. Виленкина по комбинаторике будет интересна школьникам старших классов, интересующимся математикой, учителям и всем, кому приходится иметь дело с комбинаторными задачами. В 1976 году она удостоена второй премии Всесоюзного конкурса на лучшее произведение научно-популярной литературы.

В настоящее время тираж книги полностью разошелся. Мы надеемся, что издательство «Наука» выпустит второе издание этой полезной книги, расширив ее объем, что даст возможность включить решения приведенных в ней задач и другой материал, исключенный при подготовке книги.

М. Смолянский

*) О группах можно прочитать в «Кванте», 1976, № 10.

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. По случаю избрания Мирафлореса президентом Анчурии был устроен роскошный обед. За круглый стол сели 666 гостей, большинство из которых были лысыми. Назовем двоих сидящих по обе стороны от каждого гостя — его соседями; двоих сидящих через одного от него по обе стороны,— его «вторыми соседями» и т. д.

Мирафлорес заметил, что для каждого лысого ровно один из его вторых и один из его четвертых соседей — лысые. Сколько лысых было на обеде?

2. В магазине есть на равную сумму конфеты стоимостью 2 рубля за килограмм и стоимостью 3 рубля за килограмм. По какой цене надо продавать смесь из этих конфет?

3. Из спичек было сложено слово «ТОЛЯ» (см. рисунок). Переложите ровно одну спичку, так, чтобы получилось женское имя.

4. Дана доска 19×19 клеток. На каждой клетке поставлено по шашке. Можно ли переставить шашки так, чтобы каждая шашка оказалась на соседней клетке (по горизонтали или по вертикали, но не по диагонали)?

5. Имеются неправильные весы с двумя чашками и сколько угодно разных правильных гирь. Как отвесить на этих весах один килограмм крупы?



Л. Финк

Еще раз о счастливых билетах

Вчера мой племянник Миша вбежал ко мне с возгласом: «Дядя, я, кажется, решил!»

— Что ты решил?

— Задачу о счастливом билете. Помнишь, как-то в трамвае мы с тобой пытались посчитать, сколько существует «счастливых» трамвайных билетов, у которых сумма первых трех цифр номера равна сумме последних трех цифр?

— Как же, помню. Об этом нашем разговоре даже напечатали в «Кванте» (см. № 7 за 1975 г., с. 67—70). Значит, ты нашел точное число счастливых билетов, не пользуясь при этом методом перебора?

— Почти.

— Что значит «почти»? Почти точное число?

— Нет, число-то точное. Но я все-таки пользуюсь методом перебора. Правда, просматриваю не миллион шестизначных чисел, а в тысячу раз меньше.

— Расскажи-ка, как ты это делаешь.

— Я вычислил, сколько счастливых билетов имеют заданную сумму первых и последних трех цифр, равную определенному числу, например k. Обозначим количество трехзначных номеров с суммой цифр, равной k, через $N(k)$. Чтобы получить счастливый билет с суммой трех первых и трех последних цифр, равной k, можно выбрать любой из этих $N(k)$ трехзначных номеров для левой половины номера билета и любой другой (или тот же самый) — для правой. Например, с суммой цифр $k = 1$ есть три трехзначных номера: 001, 010 и 100. Комбинируя их, получим 9 шестизначных номеров счастливых билетов:

001001	001010	001100
010001	010010	010100
100001	100010	100100

В общем же случае счастливых билетов с суммой цифр, равной k в каждой «половинке», будет $[N(k)]^2$. Наименьшее возможное значение k равно 0 (для номера 000), а наибольшее — 27 (для номера 999). Просуммировав значения $[N(k)]^2$ по k от 0 до 27, мы получим число всех возможных счастливых билетов. Сделав это, я нашел ответ — число счастливых билетов $C = 55\,252$. То есть в среднем один из 18 билетов является счастливым.

Миша радовался так, будто оторвал сразу несколько счастливых билетов.

Поздравляю тебя с решением, — сказал я. — Вот только мне не ясно, каким образом ты определял значения $N(k)$

— Очень просто. Выписал тысячу трехзначных чисел от 000 до 999 и подсчитал сумму цифр у каждого. Я справился с этим без всяких вычислительных машин — всего за одно воскресенье, — гордо ответил Миша.

— Что же, похвально. Но, пожалуй, полезнее было бы поискать формулу или правило, позволяющее находить $N(k)$ без перебора.

— Я пробовал, дядя, честное слово! Но ничего не получилось.

— Давай попытаемся вместе. Для начала слегка изменим обозначение: вместо $N(k)$ будем писать $N_3(k)$.

— А что означает эта тройка внизу?

— То, что мы рассматриваем трехзначные номера.

— Но это и так ясно!

— Дело не в этом. Мы обобщим задачу и будем искать $N_n(k)$ — количество n-значных номеров с суммой цифр, равной k.

— Дядя, я не могу решить задачу для трехзначных номеров, а ты хочешь решать ее и для четырехзначных, и для пятизначных ... Ведь это значительно труднее!

— Конечно, труднее, если пользоваться перебором. Но легче, если рассуждать логически. Между прочим, в истории математики известно немало задач, решить которые удалось лишь после того, как они были сформулированы в общем виде. Попробуй для начала найти $N_1(k)$.

— Сейчас подумаю. Нужно определить, сколько однозначных чисел имеет сумму цифр k. Но для однозначного числа сумма цифр совпадает с самим числом. Тут и решать нечего. Есть одно однозначное число с суммой цифр, равной нулю, — это 0; одно однозначное число с суммой цифр, равной единице, — это 1, одно число с суммой цифр, равной двум, — 2, и т. д. Значит $N_1(k) = 1$, если k принимает значения от 0 до 9, а при других значениях k — $N_1(k) = 0$.

— Отлично! Пойдем дальше. Предположим теперь, что мы уже знаем значения $N_{n-1}(k)$ для всех k. Попробуем выразить через них $N_n(k)$. Другими словами, попробуем найти количество n-значных номеров с суммой цифр, равной k, предполагая, что для $(n-1)$-значных номеров задача уже решена.

— Ясно, — ответил Миша. Значения $N_1(k)$ мы уже знаем; поэтому нужно найти только способ перехода от $n-1$ к n. Тогда мы сможем последовательно определить значения $N_2(k)$, $N_3(k)$, и т. д. Ну что же, попробуем. Пусть первой цифрой n-значного номера является число l. Чтобы сумма цифр этого номера была равна k, остальные его цифры должны в сумме дать $k-l$. Таких $(n-1)$-значных номеров существует $N_{n-1}(k-l)$. Цифра l может быть любым целым однозначным числом, не превосходящим k (то есть $0 \leqslant l \leqslant 9$, $l \leqslant k$), и каждой из этих цифр соответствует $N_{n-1}(k-l)$ n-значных номеров с суммой цифр, равной k, причем все эти номера различны. Значит, всего таких номеров будет

$$N_n(k) = N_{n-1}(k) + N_{n-1}(k-1) + N_{n-1}(k-2) + N_{n-1}(k-3) + N_{n-1}(k-4) + N_{n-1}(k-5) + N_{n-1}(k-6) + N_{n-1}(k-7) + N_{n-1}(k-8) + N_{n-1}(k-9); \quad (*)$$

причем, если $k < 9$, то для $l > k$ соответствующие значения $N_{n-1}(k-l)$ мы будем считать равными нулю.

По формуле (*) можно вычислить значения $N_n(k)$ для всех k, если известны значения $N_{n-1}(k)$. А так как значения $N_1(k)$ мы уже знаем, то задача решена!

— Совершенно верно, — сказал я. Формулы, аналогичные формуле (*), называются *рекуррентными*. Конечно, чтобы по формуле (*) вычислить все значения $N_3(k)$, нужно потрудиться, но не целый день, а минут 10—15. Но дело не во времени, а в получении регулярного, непереборного решения. Пользуясь полученной формулой, можно вычислить количество счастливых билетов не только для наших трамваев, но и для трамваев с восьмизначными, десятизначными и вообще $2n$-значными номерами. Помнится, я читал в одном фантастическом романе, что в автобусах главной планеты системы α Центавра для билетов используются именно восьмизначные номера. Давай-ка найдем, чаще ли жителям этой планеты попадаются счастливые билеты, чем нам?

Миша взял листок бумаги и начал рисовать таблицу. Прежде всего он заполнил столбец для $n = 1$ единицами при k в пределах от 0 до 9. Остальные клетки этого столбца можно было заполнить нулями, но он решил их не писать. Столбец для $n = 2$ Миша получил по рекуррентной формуле (*), сложив соответствующие значения $N_1(k)$, $N_1(k-1)$, ..., $N_1(0)$

Так, $N_2(6) = N_1(6) + N_1(5) + N_1(4) + N_1(3) + N_1(2) + N_1(1) + N_1(0) = 7$. Затем по той же формуле были построены столбцы для $n = 3$ и $n = 4$.

Таблица значений $N_n(k)$

k \ n	1	2	3	4
0	1	1	1	1
1	1	2	3	4
2	1	3	6	10
3	1	4	10	20
4	1	5.	15	35
5	1	6	21	56
6	1	7	28	84
7	1	8	36	120
8	1	9	45	165
9	1	10	55	220
10		9	63	282
11		8	69	348
12		7	73	415
13		6	75	480
14		5	75	540
15		4	73	592
16		3	69	633
17		2	63	660
18		1	55	670
19			45	660
20			36	633
21			28	592
22			21	540
23			15	480
24			10	415
25			6	348
26			3	282
27			1	220
28				165
29				120
30				84
31				56
32				35
33				20
34				10
35				4
36				1

— Теперь, — сказал Миша закончив таблицу, — можно подсчитать число счастливых билетов с двузначными, четырехзначными, шестизначными и восьмизначными номерами. Для этого все числа в n-м столбце моей таблицы нужно возвести в квадрат и сложить.

Проделав это, Миша получил:
для двузначных номеров $C = 10$,
для четырехзначных $C = 670$,
для шестизначных $C = 55\,252$,
для восьмизначных $C = 4\,840\,030$.

— Таким образом, — подытожил Миша, — на планете системы α Центавра на 100 миллионов билетов приходится чуть больше чем 4,8 миллиона счастливых. В среднем — примерно один счастливый билет из 21, а не из 18, как у нас. Им потруднее, чем нам, добывать свое «счастье».

— Вот теперь, — сказал я, — можно считать поставленную задачу решенной.

— А нет ли других способов ее решения? — спросил Миша.

— Вероятно, есть. Может быть, их придумают читатели «Кванта» и поделятся с нами? Не обязательно стараться найти точное число счастливых билетов, можно ограничиться оценкой или приближенной формулой, если эти оценки обеспечивают небольшую относительную погрешность. Вот, например, одна простая формула, выражающая количество $2n$-значных счастливых билетов при любом n с относительной погрешностью не более 4 %:

$$C \approx 10^{2n} / \sqrt{33 n\pi}.$$

С увеличением n относительная погрешность быстро уменьшается.

— Как ты получил эту формулу, дядя?

— Сейчас это объяснить трудно. Я воспользовался методами теории вероятностей; надеюсь, что через несколько лет ты с этой теорией познакомишься.



К статье **«Периодические функции»**

1. На рисунке 1 показано, как описанная в примере 4° конструкция дает функцию с периодом $T_0 = T/2$. (Постройте аналогично функцию с периодом $T_0 = T/3$.)

2. а) Функция $f(x) = \sin|x|$ непериодична.

б) Функция $f(x) = |\sin x|$ периодична с наименьшим положительным периодом π.

в) Функция

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x} = \begin{cases} 1 \text{ при } \sin x \neq 0, \text{ т. е. } x \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \\ \text{не определена при } x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

периодична с наименьшим положительным периодом π. (Нарисуйте графики функций из задачи 2.)

3. а) и б). Функции $f(x) = 1/x$ и $g(x) = \sin(1/x)$ непериодичны, поскольку их область определения есть множество $\{x | x \neq 0\}$; и не выполнено условие (А) (ср. с примером 5°).

в) Функция

$$f(x) = \sin[(\sqrt{x})^2] = \begin{cases} \sin x \text{ при } x > 0, \\ \text{не определена при } x < 0 \end{cases}$$

непериодична — не выполнено условие (А) (ср. с примером 6°). [Отметим, что для $T_0 = 2\pi$ при любом $x \in D(f)$ тем не менее выполнено условие $(Б_0)$: $f(x) = f(x+T)$; эта функция, так сказать, «периодична в одну сторону — вправо».]

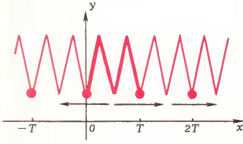


Рис. 1.

г) Если функция $f(x) = x^2+3x+17$ периодична и $T \neq 0$ — ее период, то при любом $x \in D(f) = \mathbf{R}$ должно быть выполнено соотношение $f(x+T) = f(x)$, т. е.

$$(x+T)^2+3(x+T)+17 = x^2+3x+17,$$

$$\text{или } 2Tx+T^2+3T = 0.$$

Подставив сюда $x = 0$ и $x = 1$, получим два уравнения, которым должно удовлетворять число T:

$$T^2+3T = 0 \text{ и } T^2+5T = 0.$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем: $2T = 0$, и $T = 0$, в противоречие с условием $T \neq 0$. Значит, f непериодична.

д) Функция $f(x) = x^2+\sin x$ обращается в нуль при $x = 0$ и не может быть равна нулю при $|x| > 1$ (ибо тогда $x^2 > 1$ и $\sin x \geqslant -1$, откуда $f(x) = x^2+\sin x > 1+(-1) = 0$). Следовательно, f непериодична [если бы f была периодична с периодом T, то $f(x) = 0$ при $x = nT$ (поясните!), т. е. f обращалась бы в нуль при сколь угодно больших значениях x, а это противоречит вышесказанному].

е) Функция $f(x) = \sin\sqrt{|x|}$ всюду определена, поэтому, конечно, условие периодичности (А) выполнено. Допустим, что f периодична с периодом T. Рассмотрим нули функции f, т. е. x такие, что $f(x) = 0$. Мы имеем:

$$\sin\sqrt{|x|} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x|} = \pi n,$$

$$\text{где } n \in \mathbf{Z},\ n \geqslant 0,$$

поэтому $|x| = \pi^2 n^2$, то есть $x = \pm a_n = \pm\pi^2 n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Заметим, что расстояние по числовой оси между соседними нулями a_n и a_{n+1} (или $-a_n$ и $-a_{n+1}$) равно

$$a_{n+1} - a_n = \pi^2(n+1)^2 - \pi^2 n^2 = \pi^2(2n+1)$$

и стремится к бесконечности с ростом n. С другой стороны, из предполагаемой периодичности f следует, что

$$f(nT) = f(0) = 0 \text{ и } f(\pi^2+nT) = f(\pi^2) = f(a_1) = 0,$$

т. е. у функции f имеется бесконечно много нулей nT и π^2+nT на одном и том же расстоянии π^2 друг от друга. Очевидно, это противоречит вышесказанному (поясните!) Следовательно, функция f непериодична. [Попробуйте аналогичным образом доказать непериодичность функции $f(x) = \sin(x^2)$.]

4. а) π, б) π, в) 2π, г) 12π, д) 2π, е) $2\sqrt{2}\pi$.

5. Сформулированное утверждение неверно. Например, функции $f(x) = \cos x+1$ и $g(x) = 1-\cos x$ имеют наименьший период 2π, а их сумма $f(x)+g(x) = 2$ — постоянная функция, периодом которой является любое число. Второй пример: функции

$f(x) = \cos x + \cos 2x$ и $g(x) = 1 - \cos x$

имеют наименьший период 2π (поясните), а их сумма

$$f(x)+g(x) = 1+\cos 2x$$

имеет наименьший период в 2 раза меньше — $T_0 = \pi$.

6. а) Заметим, что функция $f(x) = \cos x \cdot \cos(\sqrt{2}x)$ принимает значение $y=1$ только при $x=0$. В самом деле,

$$\cos x \cdot \cos\sqrt{2}x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \cos x = 1, \\ \cos\sqrt{2}x = 1 \end{array}\right. \\ \text{или} \left\{\begin{array}{l} \cos x = -1, \\ \cos\sqrt{2}x = -1 \end{array}\right. \end{array}\right].$$

В первом случае имеем: $x = 2\pi m$ и $\sqrt{2}x = 2\pi n$, где $m, n \in Z$. Если $x \neq 0$ удовлетворяет обоим этим соотношениям (при каких-то m и n), то после деления второго уравнения на первое получим:

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}, \text{ т. е. } \sqrt{2} \text{ — рациональное число.}$$

Противоречие показывает, что первая система имеет единственное решение $x=0$. Вторая система вообще не имеет решений, что доказывается аналогичным образом.

Итак, $f(x) = 1$ только при $x = 0$, и поэтому функция f периодической быть не может (в противном случае $f(T) = f(0) = 1$!).

б) Выражение для функции $f(x) = \cos x + \cos\sqrt{2}x$ можно преобразовать к виду

$$f(x) = 2\cos\frac{x+\sqrt{2}x}{2}\cos\frac{x-\sqrt{2}x}{2} = 2\cos\frac{1+\sqrt{2}}{2}x \cdot \cos\frac{1-\sqrt{2}}{2}x.$$

Далее, как в задаче а), доказывается, что $f(x) = 2$ лишь при $x=0$, и поэтому f непериодична. (Отметим, что число $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ иррационально. Докажите это рассуждением от противного.)

Другой способ — сразу заметить, что $f(x) = 2$, лишь если $\cos x = \cos\sqrt{2}x = 1$; тем самым задача сводится к уже разобранной.

в) Заметим, прежде всего, что рассуждения пункта а) для функции $f(x) = \sin x \times \sin\sqrt{2}x$ не проходят (попробуйте!). Поступим иначе.

Рассмотрим нули функции f, то есть x такие, что $f(x) = 0$.

Имеем:

$$\sin x \cdot \sin\sqrt{2}x = 0 \Leftrightarrow [\sin x = 0 \text{ или } \sin\sqrt{2}x = 0]$$

то есть $x = a_m = \pi m$ или $x = b_n = \frac{\pi n}{\sqrt{2}}$, где $m, n \in Z$.

Допустим, что функция f периодична с периодом $T \neq 0$. Поскольку $f(T) = f(0+T) = f(0) = 0$, либо $T = a_{m_0}$, либо $T = b_{n_0}$ (для некоторых m_0, n_0, отличных от 0).

Разберем сначала случай $T = a_{m_0}$. Так как $f(b_1 + T) = f(b_1) = 0$, то число $b_1 + T = b_1 + a_{m_0}$ должно равняться либо a_m, либо b_n. В первом случае

$$b_1 + a_{m_0} = a_m, \text{ т. е. } \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \pi m_0 = \pi m,$$

откуда $\frac{1}{\sqrt{2}} = m - m_0$ и $\sqrt{2} = \frac{1}{m-m_0} \in Q$ — противоречие. Во втором случае

$$b_1 + a_{m_0} = b_n, \text{ т. е. } \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \pi m_0 = \frac{\pi n}{\sqrt{2}},$$

откуда $\frac{n-1}{\sqrt{2}} = m_0$ и $\sqrt{2} = \frac{n-1}{m_0} \in Q$ — опять противоречие.

Аналогичным образом мы приходим к противоречию и в случае, когда $T = b_{n_0}$ (рассмотрите его самостоятельно).

г) Формулу, задающую функцию $f(x) = \sin x + \sin\sqrt{2}x$, можно преобразовать к виду

$$f(x) = 2\sin\frac{1+\sqrt{2}}{2}x \cdot \cos\frac{1-\sqrt{2}}{2}x.$$

Далее рассуждаем, как в предыдущей задаче в).

7. а) Сумма двух непериодических функций может быть периодической функцией. Приведем два примера:

1) $f(x) = x^2$, $g(x) = 1-x^2$, $f(x)+g(x) = 1$;

2) $f(x) = x^2 + \sin x$, $g(x) = 1-x^2$, $f(x)+g(x) = 1+\sin x$ (поясните).

б) Сумма периодической и непериодической функций может оказаться периоди-

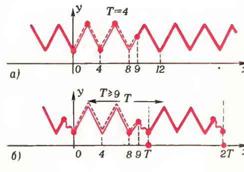


Рис. 2.

ческой! Пример:

$$f(x) = \sin x + \sin\sqrt{2}x,$$
$$g(x) = 1 - \sin(\sqrt{2}x),$$
$$f(x) + g(x) = 1 + \sin x.$$

8. На рисунках 2 *а*) и *б*) показано, как данную функцию доопределить до периодической с периодом 4 и с произвольным периодом $T \geqslant 9$.

9. Пусть $T > 0$. Рассмотрим числа $a_m = a + mT$ и $b_n = b + nT$, где m и n — целые, и положим $f(a_m) = f(a) = A$ и $f(b_n) = f(b) = B$ при любых $m, n \in \mathbf{Z}$ (см. рис. 3). Если эти соотношения задают функцию, т. е. не может случиться так, что $x = a_m = b_n$ и $f(x) = A \neq f(x) = B$, то эта функция будет периодической с наименьшим периодом T (ср. с примером 3°). Если же для некоторых m и n все-таки $a_m = b_n$, то исходную функцию (заданную в двух точках) нельзя продолжить до периодической с периодом T (поясните). Соотношение $a_m = b_n$ означает, что $a + mT = b + nT$, т. е. $(m-n)T = b - a$

и $T = \frac{b-a}{k}$, $k = m - n \in \mathbf{N}$.

Итак, нашу функцию можно продолжить до периодической с наименьшим положительным периодом T при любом $T > 0$, кроме $T = (b-a)/k$, где $k \in \mathbf{N}$. (Попробуйте аналогичным образом проанализировать ту же задачу в случае, когда $f(a) = f(b)$, т. е. $A = B$!).

10. а) Такой функции не существует. Действительно, предположив противное, среди периодов такой функции f мы имели бы иррациональные числа $T_1 = \sqrt{2}$ и $T_2 = 2 - \sqrt{2}$. Но тогда, согласно замечанию из доказательства теоремы 1, их сумма $T_1 + T_2$, т. е. рациональное число 2, являлась бы периодом f, в противоречие с условием.

б) Такие функции существуют — например, так называемая *функция Дирихле*:

$$D(x) = \begin{cases} 0 \text{ при рациональном } x, \\ 1 \text{ при иррациональном } x \end{cases}$$

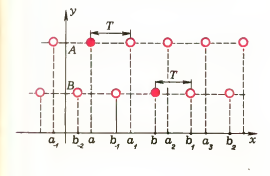


Рис. 3.

(ср. с X, с. 174, пример 3). Докажите, что любое рациональное число является периодом этой функции, а любое иррациональное — не является.

К статье «Элементы статики»

2. $T = \frac{mgr}{b}$.

3. На рисунке 4, *а* указаны силы, действующие на цилиндр A: $m\mathbf{g}$ — сила тяжести, $\mathbf{N}$ — сила нормальной реакции поверхности цилиндра B, $\mathbf{T}$ — сила натяжения нити CD. Цилиндр A находится в равновесии, следовательно, линии действия этих сил пересекаются в одной точке. Так как линии действия сил $m\mathbf{g}$ и $\mathbf{N}$ пересекаются в точке O', то и линия действия силы $\mathbf{T}$ должна проходить через эту точку, т. е. должна быть направлена вдоль радиуса r.

Построим треугольник, сторонами которого являются силы $m\mathbf{g}$, $\mathbf{N}$ и $\mathbf{T}$ (рис. 4, *б*). Этот треугольник подобен треугольнику COO'. Из подобия треугольников имеем

$$\frac{T}{O'C} = \frac{mg}{CO} = \frac{N}{OO'},$$

или

$$\frac{T}{l+r} = \frac{mg}{R} = \frac{N}{R+r}.$$

Отсюда

$$T = \frac{l+r}{R}mg, \quad N = \left(1 + \frac{r}{R}\right)mg.$$

Аналитический метод решения этой задачи привел бы к громоздким вычислениям.

4. $F_{\min} = \frac{mg}{2}$; $F_{\text{давл}} = \frac{mg\sqrt{5}}{2}$.

5. $F_{\min} = \frac{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}}mg$, $\beta = \operatorname{arctg}\mu$; $F_{\text{давл}} = \frac{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}{1+\mu^2}mg$.

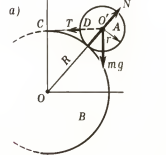


Рис. 4.

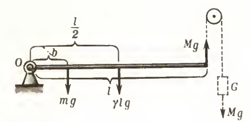


Рис. 5.

6. $F > mg\frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{R-h}$.

7. $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

8. $a_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a \approx 0{,}618\,a$.

9. На рисунке 5 указаны силы, действующие на стержень. Запишем уравнение моментов сил относительно точки O:

$$Mgl - \gamma gl\frac{l}{2} - mgb = 0,$$

где M — масса груза P. Отсюда $M = \gamma\frac{l}{2} + \frac{mb}{l}$. При $M = M_{min}$ сумма $\gamma\frac{l}{2} + \frac{mb}{l}$ должна быть минимальной. Так как $\left(\gamma\frac{l}{2}\right)\cdot\left(\frac{mb}{l}\right) = \gamma\frac{mb}{2} = \text{const}$ (при заданных условиях не зависит от l), то сумма $\gamma\frac{l}{2} + \frac{mb}{2}$ минимальна, когда $\gamma\frac{l}{2} = \frac{mb}{l}$, т. е. $l = \sqrt{\frac{2mb}{\gamma}}$.

10. $\alpha \leqslant \operatorname{arctg} 2\mu$; $F^A_{давл} = mg$, $F^B_{давл} = \mu mg$.

11. $M_{груза} = 35$ *кг*.

12. $\varphi_{max} = \arcsin\sqrt{\frac{\mu r}{(1+\mu^2)\,l}}$.

13. $\mu = \frac{\sin 2\alpha \sin\alpha}{2(1-{}^1/_2\sin 2\alpha\cos\alpha)} \approx 0{,}48$.

К статье «Прямоугольный треугольник»

2. $\frac{1}{2}h(\sqrt{h^2+l^2} - h)$. 3. 144 $см^2$.

4. 45°, 45°, 90°. 5. $a^2b\,(2a-b)$.

6. $\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. 7. 4. 8. 9:1. 9. $R-r$.

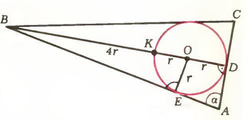


Рис. 6.

10. $\sqrt{a^2+b^2}$.

К статье «Московский инженерно-физический институт»

Математика

Вариант 1

1. Обозначим скорость катера в стоячей воде через y (*км/час*), а скорость течения реки (плота) — x (*км/час*). Из условий задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{96}{y+x} + \frac{96}{y-x} = 14, & (1) \\ \frac{96}{y+x} + \frac{72}{y-x} = \frac{24}{x}. & (2) \end{cases}$$

Для ее решения введем новую неизвестную $z = y/x$. Умножив второе уравнение системы на x, найдем

$$\frac{96}{z+1} + \frac{72}{z-1} = 24,$$

откуда после простых преобразований получаем квадратное уравнение $z^2 - 7z = 0$. Но $z \neq 0$, поэтому $z = 7$. Подставив $y = 7x$ в первое уравнение системы, имеем:

$$\frac{6}{x} + \frac{8}{x} = 7,$$

откуда $x = 2$.

Ответ: скорость катера 14 *км/час*, скорость течения реки 2 *км/час*.

2. Пусть ABC — рассматриваемый равнобедренный треугольник ($|AB| = |BC|$), O — центр вписанной окружности (рис. 6). Медиана BD пересекает окружность в двух точках: K и D. Так как точка D лежит на стороне основания треугольника, то, согласно условию, K — точка пересечения медиан треугольника ABC и $|BK| : |DK| = 2 : 1$. Обозначим радиус вписанной окружности через r, а величину угла при основании треугольника ABC через α, тогда $|DK| = 2r$, $|BK| = 4r$, $|BO| = 5r$. Соединим центр вписанной окружности с точкой касания E и рассмотрим треугольник BOE. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, поэтому треугольник BOE — прямоугольный. Из треугольника

ABD имеем $\widehat{ABD} = \pi/2-\alpha$, а из треугольника BEO

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{|OE|}{|BO|}=\frac{1}{5}.$$

Отсюда $\quad \alpha = \arccos\frac{1}{5}.$

3. О. Д. З.: $x\geqslant 0$. Перепишем неравенство так:

$$3^{\sqrt{x}}>3^{a\log_3 2}.$$

Отсюда $\sqrt{x}>a\log_3 2$. Но $\log_3 2>0$, поэтому $x\geqslant 0$ при $a<0$, $x>(a\log_3 2)^2$ при $a\geqslant 0$.

4. Из первого уравнения системы находим $\sin x = -\cos y$. Подставив полученное значение $\sin x$ во второе уравнение системы, найдем $\cos^2 y = 1/4$. Таким образом, исходная система распадается на две:

$$\begin{cases}\sin x = -\dfrac{1}{2},\\ \cos y = \dfrac{1}{2},\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin x = \dfrac{1}{2},\\ \cos y = -\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Ответ: $x_1=(-1)^{k+1}\pi/6+k\pi$, $y_1=\pm\pi/3+2l\pi$; $x_2=(-1)^{k}\pi/6+k\pi$, $y_2=\pm 2\pi/3+2l\pi$ (k, l — целые).

Вариант 2

1. 6. 2. $\pi r^2/\sin^4(\alpha/2)$. 3. $-1/2<x<2$. 4. $x_1=\pi/6+2k\pi$, $y_1=\pi/3+2n\pi$; $x_2=7\pi/6+2k\pi$, $y_2=4\pi/3+2n\pi$; $x_3=-\pi/6+2k\pi$, $y_3=2\pi/3+2n\pi$; $x_4=5\pi/6+2k\pi$, $y_4=5\pi/3+2n\pi$ (k, n — целые).

Вариант 3

1. 63. 2. $a^3(2+\mathrm{tg}\,\alpha)^3\,\mathrm{ctg}^2\alpha/6$. 3. При $0<a<1$, $1<a<2$, $a=3$ одно решение: $x=a+2$; при $2<a<3$, $a>3$ два решения: $x_1=a+2$, $x_2=a-2$; при других a решений нет. Указание. См. рис. 7 (черным отмечены области, не входящие в О.Д.З., красным — решения уравнения). 4. $x=\pi\pm\arccos(1/2\sqrt{2})+2k\pi$ (k — целое).

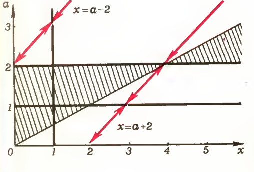


Рис. 7.

Физика

1. $\mathscr{E}=\dfrac{U_2U'}{U'-U_1}=12$ *в*.

2. $Q=\dfrac{(B_2-B_1)^2S^2\cos^2\alpha}{\tau R}=25$ *мкдж*.

3. $A=\dfrac{hc\,(n^2-\lambda_2/\lambda_1)}{\lambda_2\,(n^2-1)}\approx 2{,}2\cdot 10^{-19}$ *дж* $\approx 1{,}4$ *эв*.

К статье «XVIII Олимпиада по математике»

1. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, удовлетворяющий условиям задачи. Обозначим $|AB|=a$, $|BD|=b$, $|CD|=c$. По условию $a+b+c=16$ (*см*). Оценим площадь четырехугольника $ABCD$: $32\leqslant\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc$ (поскольку $S_{\square ABCD}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta BCD}$), причем равенство достигается, лишь если $\widehat{ABD}=\widehat{BDC}=90^\circ$. Но $\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}b(a+c)=\frac{1}{2}b(16-b)=32-\frac{1}{2}(8-b)^2\leqslant 32$, причем равенство достигается, лишь если $b=8$ (*см*). Значит, $b=8$ (*см*), $\widehat{ABD}=\widehat{BDC}=90^\circ$, а отсюда легко следует, что $|AC|=8\sqrt{2}$ (*см*).

2. Сделаем замену $x=2\cos\alpha$, тогда $P_1(x)=2\cos 2\alpha$, $P_2(x)=(2\cos 2\alpha)^2-2=2\cos 4\alpha$ и далее по индукции несложно показать, что $P_n(x)=2\cos(2^n\alpha)$.

Данное уравнение перепишется в виде $2\cos(2^n\alpha)=2\cos\alpha$, откуда $\sin\dfrac{(2^n-1)\alpha}{2}\times\sin\dfrac{(2^n+1)\alpha}{2}=0$, $\alpha_1=\dfrac{2k\pi}{2^n-1}$, $\alpha_2=\dfrac{2l\pi}{2^n+1}$, $x_1=2\cos\dfrac{2k\pi}{2^n-1}$, $x_2=2\cos\dfrac{2l\pi}{2^n+1}$ ($k=0,1,\dots,2^{n-1}-1$; $l=1,2,\dots,2^{n-1}$). Осталось доказать, что все эти корни различны, так как многочлен $P_n(x)-x$ имеет степень 2^n и не может иметь больше чем 2^n корней. Различие корней внутри серий следует из монотонности функции $\cos\alpha$, а различие корней из разных серий следует из взаимной простоты чисел 2^n-1 и 2^n+1.

Второе решение этой задачи может быть получено из такого замечания: когда x пробегает отрезок $[-2; 2]$, $P_1(x)$ дважды пробегает этот отрезок, сначала убывая от 2 до -2, а затем возрастая от -2 до 2. Отсюда несложно вывести, что у уравнения $P_n(x) = x$ вдвое больше вещественных корней, чем у уравнения $P_{n-1}(x) = x$.

3. Из условия задачи следует, что ребра коробки имеют целочисленные длины. Обозначим их через a, b и c и будем считать, что $a \leqslant b \leqslant c$. Поскольку на отрезке длины x помещается не более $[x/\sqrt[3]{2}]$ отрезков длины $\sqrt[3]{2}$, то кубики объема 2, помещенные («встык») в коробку, образуют прямоугольный параллелепипед, максимальные размеры которого будут $[a/\sqrt[3]{2}]$, $[b/\sqrt[3]{2}]$, $[c/\sqrt[3]{2}]$. По условию

$$2\,[a/\sqrt[3]{2}]\cdot[b/\sqrt[3]{3}]\cdot[c/\sqrt[3]{2}] = 0{,}4\ abc,$$

откуда

$$\frac{a}{[a/\sqrt[3]{2}]}\cdot\frac{b}{[b/\sqrt[3]{2}]}\cdot\frac{c}{[c/\sqrt[3]{2}]} = 5. \qquad (*)$$

Проследим за изменением величин $[n/\sqrt[3]{2}]$ и $n/[n/\sqrt[3]{2}]$ при возрастании n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$[n/\sqrt[3]{2}]$	0	1	2	3	3	4	5	6	7	7
$n/[n/\sqrt[3]{2}]$	—	2	3/2	4/3	5/3	3/2	7/5	4/3	9/7	10/7

Замечаем, что при $n \geqslant 6$ будет $n/[n/\sqrt[3]{2}] \leqslant 3/2$ (поскольку при $n > 7$ из неравенства

$$[n/\sqrt[3]{2}] > n/\sqrt[3]{2} - 1$$

следует $n/[n/\sqrt[3]{2}] < \sqrt[3]{2}\cdot(1/[n/\sqrt[3]{2}] + 1)$, а при $n = 6$, $n = 7$ неравенство следует из таблицы), поэтому $2 \leqslant a < 6$ (иначе левая часть (*) не превосходит $(^3/_2)^3 = 27/8 < 5$). Теперь видим, что $n/[n/\sqrt[3]{2}]$ либо равно 2, либо равно 5/3, либо не больше $^3/_2$. Но не больше $^3/_2$ может быть лишь один из сомножителей в (*), так как иначе третий сомножитель должен быть больше 2. Значит, два из чисел a, b, c могут принимать лишь значения 2, 5. Теперь перебором вариантов находим два ответа: $a_1 = 2$, $b_1 = 3$, $c_1 = 5$; $a_2 = 2$, $b_2 = 5$, $c_2 = 6$ (надо еще учесть, что $n/[n/\sqrt[3]{2}] \neq 5/4$, так как в случае равенства будет $4n = 5\,[n/\sqrt[3]{2}]$, $64n^3 = 125\,[n/\sqrt[3]{2}]^3 \leqslant 125n^3/2$, $128n^3 \leqslant 125n^3$).

4. Пусть наибольшее значение произведения достигается для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($a_1 + \ldots + a_n = 1976$). Тогда $2 \leqslant a_i \leqslant 4$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, так как $a+1 > a\cdot 1$, и если $a_k \geqslant 5$, то $a_k < 3\,(a_k - 3)$. Далее заменим каждый сомножитель, равный 4, двумя сомножителями, равными 2, от этого произведение не изменится. Заметим еще, что $2+2+2 = 3+3$, но $2\cdot2\cdot2 < 3\cdot3$. Теперь a_i принимают значение 2 или 3, причем значение 2 принимают не более двух a_i. Но $1976 = 658\cdot3+2$, поэтому произведение равно $2\cdot3^{658}$.

5. Посмотрим, сколько существует различных наборов целых чисел

$$(t_1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_q)$$

таких, что $|t_j| \leqslant p$ для всех $j = 1, 2, \ldots, q$. Очевидно, их ровно $(2p+1)^q = (2p+1)^{2p}$, поскольку каждое t_j может принимать значения от $-p$ до p, а количество чисел t_j равно q.

Рассмотрим далее набор чисел

$$(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_p),$$

где

$$b_i = a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + \ldots + a_{iq}t_q,$$

и посмотрим, какое количество может быть различных таких наборов при $|t_j| \leqslant p$. Заведомо $|b_i| \leqslant pq$ для всех $i = 1, 2, \ldots, p$, поэтому количество наборов $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ не больше, чем $(2pq+1)^p = (4p^2+1)^p$. Но $(2p+1)^{2p} = (4p^2+4p+1)^p > (4p^2+1)^p$, поэтому каким-то двум наборам $(t_1, t_2, \ldots, t_q)$ и $(t_1', t_2', \ldots, t_q')$ соответствует один и тот же набор $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ («принцип Дирихле»), то есть для любого i выполнено равенство

$$a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + \ldots + a_{iq}t_q = a_{i1}t_1' + a_{i2}t_2' + \ldots + a_{iq}t_q'\ (= b_i).$$

Но тогда набор чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$, где $x_k = t_k - t_k'$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$, удовлетворяет данной в условии задачи системе уравнений, причем хоть одно из x_i отлично от нуля (поскольку наборы $(t_1, \ldots, t_q)$ и $(t_1', \ldots, t_q')$ различны) и

$$|x_j| = |t_j - t_j'| \leqslant |t_j| + |t_j'| = 2p = q\ (j = 1, 2, \ldots, q).$$

6. Рассмотрим несколько первых значений u_n и попробуем представить их целую

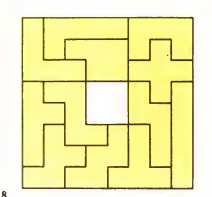


Рис. 8.

1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9

Рис. 9.

часть в виде, указаином в условии задачи:

$$u_0 = 2 = 1+1 = 2^{(2^0-(-1)^0)/3}+2^{-(2^0-(-1)^0)/3};$$
$$u_1 = 2+{}^1/_2 = 2^{(2^1+1)/3} + 2^{-(2^1+1)/3};$$
$$u_2 = {}^5/_2 = 2^{(2^2-1)/3} + 2^{-(2^2-1)/3};$$
$$u_3 = 8+{}^1/_8 = 2^{(2^3+1)/3} + 2^{-(2^3+1)/3}.$$

Естествеино предположить, что всегда

$$u_n = 2^{(2^n-(-1)^n)/3} + 2^{-(2^n-(-1)^n)/3}.$$

Это легко доказывается по иидукции, а отсюда следует утверждеиие задачи.

К задачам «Квант» для младших школьников»
(см. «Квант» № 11)

1. Рассмотрим два соседиих зиака из набора Попа. Между ними встанет один знак из набора Балды. Если знаки Попа различны, то какой бы знак ни написал Балда, Поп получит иа этом один щелбаи. Если же зиаки Попа одииаковы, то в лучшем случае (когда зиак Балды совпадает с его зиаками) он ие получит ии одного щелбаиа, ио зато в худшем случае (когда знак Балды отличается от его зиаков) ои получит целых два щелбана. Значит, Попу иадо чередовать зиаки, тогда он получит ровно 1976 щелбанов.

2. 737 = 67×11 (оба эти числа — простые). Поэтому в классах 67 учеников, каждый из которых купил 11 книг.

3. 209×209 = 43 681; 153×153 = = 23 409.

4. Произведение шести указаиных в условии тройиых произведений равно $-a^2b^2c^2d^2e^2f^2g^2h^2k^2$, т. е. отрицательио. Значит, шесть рассматриваемых чисел ие могут быть все положительными или все отрицательными.

5. При каждом движении шерстяиого лоскута по стеклянной палочке наэлектризоваииые опилки будут разлетаться в стороны, высыпаясь из воронки в виде «шатра».

(см. с. 67)

1. Легко заметить, что от каждого лысого идет (через одного) следующая цепочка лысых (Л) и иелысых (Н):

...ЛЛНЛЛНЛЛН...,

поэтому среди 333 гостей, сидящих через одиого, будет 222 лысых. Поскольку лысых большинство, такая же цепочка будет для гостей, сидящих между рассмотреииыми, поэтому всего лысых 444.

2. 2 р. 40 к. за килограмм.

3. ТОЛЯ→ЮЛЯ.

4. Нельзя. Указание. Раскрасим доску под «шахматиую» и поставим иа белые поля белые шашки, а иа черные — черные. После перестаиовки белые шашки должны стоять на черных полях, а черные — на белых, но числа белых и черных полей иа доске 19×19 различны.

5. Поставить иа одну чашку весов килограммовую гирю и уравиовесить ее с помощью имеющихся правильиых гирь. Затем заменить килограммовую гирю таким количеством крупы, чтобы весы оставались в равиовесии.

К головоломкам

«Звезда из домино»
(см. «Квант» № 11 с. 31)

0:0, 0:5, 5:6, 6:2;
1:1, 1:3, 3:5, 5:5;
2:2, 2:0, 0:6, 6:6;
3:3, 3:2, 2:5, 5:1;
4:3, 3:6, 6:1, 1:0;
5:4, 4:4, 4:0, 0:3;
6:4, 4:2, 2:1, 1:4;

«Восстановите пентамино», «Четыре и сто»
(см. 4-ю с. обл.).
См. рис. 8, 9.

К задачам
(см. с. 54)

3. Указание. $x^3+6x^2+11x+6= =(x+1)(x+2)(x+3)$.

5. а) $\overline{xyz} = 625$; б) $\overline{yx} = 25$; в) $\overline{yx} = 32$.

Напечатано в 1976 году

Номер оформнлн художннкн:
М. Дубах, Г. Краснков, А. Пономарева, И. Смнрнова, Э. Смнрнов.

Корректор Л. С. Сомова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 22/IX—76
Подписано в печать 1/XI—76
Бумага 70×100 1/16. Фнз. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-нзд. л. 7,57 Т-20306
Тнраж 313 685 экз.
Цена 30 коп. Заказ 2135

Чеховскнй полнграфнческнй комбннат Союзполнграфпрома
прн Государственном комнтете Совета Мнинстров СССР по делам издательств, полнграфни н кинжной торговли,
г. Чехов Московской областн

Рукописи не возвращаются

75 ЛЕТ НОБЕЛЕВСКИМ ПРЕМИЯМ









Каждый год, начиная с 1901 года, 10 декабря король Швеции в торжественной обстановке вручает лауреатам Нобелевские премии. Эти международные премии получили свое название по имени их учредителя Альфреда Нобеля, шведского инженера-химика, изобретателя и промышленника, который для этих целей завещал весь свой капитал. Ежегодно присуждается пять Нобелевских премий за работы по физике, химии, физиологии или медицине, литературе, а также за деятельность по укреплению мира между народами. Кроме того, в 1968 году Государственный банк Швеции учредил ежегодную премию памяти Нобеля за работы в области экономических наук. Наиболее высокий престиж имеют Нобелевские премии в области науки. В числе лауреатов по физике — виднейшие ученые разных стран, такие как Рентген, Лоренц, Беккерель, Пьер и Мария Кюри, Планк, Эйнштейн, Бор, де Бройль, Гейзенберг, Дирак, Ферми.

В 1958 году Нобелевскую премию по физике получили советские ученые И. Е. Тамм, И. М. Франк и П. А. Черенков за открытие и объяснение явления свечения, известного под названием «эффект Черенкова». За исследование по теории конденсированных сред, особенно жидкого гелия, премия по физике 1962 года была присуждена Л. Д. Ландау. Н. Г. Басов и А. М. Прохоров вместе с американским ученым Ч. Таунсом получили в 1964 году Нобелевскую премию по физике за фундаментальные исследования в области квантовой радиофизики.

На фото приведены марки, посвященные лауреатам Нобелевских премий.

А. Алтыкис











Цена 30 коп.
Индекс 70465

ВОССТАНОВИТЕ ПЕНТАМИНО

В квадрате (с вырезанным центром) уложены 12 тетрамино (фигуры из 4 клеток) и 12 квадратиков (рисунок сверху). Сотрите 12 перегородок, отделяющих квадраты от тетрамино, так, чтобы этот же квадрат (без центра) был заполнен 12 пентамино (фигуры из 5 клеток), изображенными внизу.

ЧЕТЫРЕ И СТО

Начиная с цифры 1 в верхнем левом углу проведите ломаную в нижний правый угол с цифрой 9. При этом двигаться от цифры к цифре можно только либо вправо, либо вниз; количество «поворотов» должно быть равно 4; сумма цифр, перечеркнутых ломаной, должна равняться 100.

Л. Мочалов

